# Polynomial derivations and their automorphism groups

I. Pan, A. Rittatore

Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Uruguay

Master class Groups in action, 2026

Partially suppported by ANII, CSIC

# Dérivations de $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ et leur groupe des automorphismes

- PREMIER EXPOSÉ: Dérivations et automorphismes.
- SECOND EXPOSÉ: Dérivations simples et leur groupe des automorphismes.
- TROISIÈME EXPOSÉ: Quelques problèmes intéressants.

# Premier exposé

# Quelques notations et supposés de base

- On travaille sur un corps $\mathbb{k}$ algébriquement clos, de caractéristique 0 — on travaille sur $\mathbb{C}$, mais on écrit $\mathbb{k}$.
- Les $\mathbb{k}$-algèbres seront des domaines, — au moins quand on a le droit de les choisir —; on écrira $\mathbb{k}$-domaine.
- Si $B$ est un $\mathbb{k}$-domaine, alors $B^*$ est son groupe des unités.
- $\mathsf{Aut}(B)$ est le groupe d'automorphismes (de $\mathbb{k}$-algèbres) de $B$.
- Si $A \subset B$ est un sous-algèbre, alors $\mathsf{tr.deg}_A(B)$ est le degré de transcendance de $B$ sur $A$.

# La géométrie algébrique nécéssaire

## Ou comment se debroullier sans

- Se rappeler qu' on travaille sur $\mathbb{k} = \mathbb{C}$.
- On travaillera au plus avec des variétés algébriques affines — surtout avec $\mathbb{A}^n = \mathbb{C}^n$.
- La catégorie des variétés affines est isomorphe à la catégorie des $\mathbb{C}$-algèbres de type fini, sans nilpotents.
- On travaillera avec des groupes algébriques affines, qui sont des sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
- Sur $\mathbb{C}$, *pour les définitions* on peut penser au contexte différentiable avec des morphismes qui sont donnés par des formules polynomiaux.

# Automorphismes et dérivations de $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$

## Les joueurs

- Le *groupe de Cremona affine* est le groupe des automorphismes de l'algèbre des polynômes $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$, il est noté $\mathrm{ACr}(n)$.
- PGA (Parenthèse de géométrie algébrique:) $\mathrm{ACr}(n)$ est le groupe des automorphismes polynomiaux de l'espace affine $\mathbb{A}^n = \mathbb{k}^n$.
- Une *dérivation de* $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ est une transformation linéaire $D : \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ satisfaisant Leibniz:

$$D(fg) = fD(g) + D(f)g \ \forall\ f, g \in \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n].$$

- $\mathrm{Der}\left(\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]\right)$ est le $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$-module des dérivations.

# Quelques exemples

1. Si $f \in \mathrm{ACr}(n)$ et $x = (x_1, \ldots, x_n)$, alors $f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big)$, $f_i = f(x_i) \in \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$.
2. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{k}) \subset \mathrm{ACr}(n)$, $\mathrm{Aff}_n(\mathbb{k}) = \big\{t_v \circ T \,:\, T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{k})\,,\ t_v(x) = x + v\,, v \in \mathbb{A}^n\big\}$, $t_v \circ T(x) = Tx + v$.
3. $f(x, y) = \big(a_1 x + b_1, a_2 y + b_2(x)\big)$, $a_i \neq 0, b_1 \in \mathbb{k}$ est un automorphisme de $\mathbb{k}[x, y]$.
4. Plus en général, si $n \geq 2$ alors $f(x) = \big(a_1 x_1 + b_1, a_2 x_2 + b_2(x_1), a_3 x_3 + b_3(x_1, x_2), \ldots, a_n x_n + b_n(x_1, ..., x_{n-1})\big)$, $a_i \neq 0$, $b_1 \in \mathbb{k}$ est un *automorphisme de de Jonquières*.

1. Les dérivés partielles formelles sont des dérivations. $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} : \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$
2. Si $f_i \in \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$, alors $\sum_i f_i \partial_{x_i} \in \mathrm{Der}\big(\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]\big)$.
3. En fait, $\mathrm{Der}\big(\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]\big) = \big\{\sum_i f_i \partial_{x_i} \,:\, f_i \in \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]\big\}$

# La géométrie de $\mathrm{ACr}(n)$

## Un problème très difficile

Étant donné que le groupe $\mathrm{ACr}(n)$ agît (canoniquement) sur l'espace affine $\mathbb{A}^n$, on voudrait considérer cette action dans un contexte géométrique, mais:

**Théorème**

*Si $n \geq 2$, le groupe $\mathrm{ACr}(n)$ n'admette pas de structure de groupe algébrique telle que l'action canonique soit régulière.*

On a toutefois un résultat positif:

**Théorème (Kambayashi, 1979)**

*$\mathrm{ACr}(n)$ est une ind-variété (c-à-d $\mathrm{ACr}(n)$ est filtré par des variétés algébriques), de sorte que la structure de groupe de $\mathrm{ACr}(n)$ et l'action de $\mathrm{ACr}(n)$ sur $\mathbb{A}^n$ devient des morphismes d'ind-variétés.*

# Les dérivations et la géométrie

**Lemma**

$\mathrm{Der}\big(\Bbbk[x_1,\ldots,x_n]\big)$ *est une algèbre de Lie, avec* $[D,E] = DE - ED$ *si* $D, E \in \mathrm{Der}\big(\Bbbk[x_1,\ldots,x_n]\big)$ *—rapellons qu'elle est aussi un* $\Bbbk[x_1,\ldots,x_n]$*-module.*

Si $p \in \Bbbk[x_1,\ldots,x_n]$ et $x = (x_1,\ldots,x_n)$, alors $p \mapsto D(p)(x)$ est une *dérivation dans un point*, donc il existe un vecteur de $T_x\mathbb{A}^n$ associé a $D$.

**Lemma**

*Il existe une correspondence entre* $\mathrm{Der}\big(\Bbbk[x_1,\ldots,x_n]\big)$ *et l'algèbre de Lie des champs de vecteurs polynomiaux de* $\mathbb{A}^n$ *— on peut voir cette correspondence des points de vue "géométrie differentiel" ou "géométrie algébrique".*

# Feuilletages et champs de vecteurs

## — et donc et dérivations!

### Observation

*Grosso-modo, donner un champ de vecteurs sur $\mathbb{C}^n$ est équivalent à donner une feullietage analytique singulière (par courbes) de $\mathbb{A}^n$.* ATTENTION: *ceci n'est pas une bijection — et il y a d'autres propriétés à considerer.*

### Définition

Une feuilletage analytique singulière de $\mathbb{A}^n$ par courbes est la donnée d'une partition de $\mathbb{A}^n$ par des courbes analytiques de dimension 1 (possiblement singulières) et possiblement des points isolés.

# $\mathrm{ACr}(n)$ agît sur $\mathrm{Der}\big(\mathbb{k}[x_1,\ldots,x_n]\big)$ par conjugaison

## Le lien

Soient $f \in \mathrm{ACr}(n)$, $D \in \mathrm{Der}\big(\mathbb{k}[x_1,\ldots,x_n]\big)$ et $p \in \mathbb{k}[x_1,\ldots,x_n]$. Alors $fDf^{-1} : \mathbb{k}[x_1,\ldots,x_n] \to \mathbb{k}[x_1,\ldots,x_n]$,

$$fDf^{-1}(p) = f\Big(D\big(f^{-1}(p)\big)\Big) \in \mathbb{k}[x_1,\ldots,x_n]$$

est une dérivation.

Il est facile à voir que ceci est une *action de* $\mathrm{ACr}(n)$ *sur* $\mathrm{Der}\big(\mathbb{k}[x_1,\ldots,x_n]\big)$ *(par conjugaison)*.

PGA: L'action canonique de $\mathrm{ACr}(n)$ sur $\mathbb{A}^n$ induit l'action par conjugaison de $\mathrm{ACr}(n)$ sur $\mathrm{Der}\big(\mathbb{k}[x_1,\ldots,x_n]\big)$.

# Les questions qu'on se pose

L'action par conjugaison de $\mathrm{ACr}(n)$ sur $\mathrm{Der}\big(\Bbbk[x_1,\ldots,x_n]\big)$ permet d'une part classifier les derivations et d'autre part donne des informations sur des sous-groupes de $\mathrm{ACr}(n)$. On se pose donc les suivantes:

## Questions

- *Supposons que le groupe d'isotropie d'une dérivation $D$ (c-à-d le groupe des automorphismes qui fixent D) est algébrique; qu'est-ce que l'on peut dire sur $D$?*
- *À la réciproque, si $D \in \mathrm{Der}\big(\Bbbk[x_1,\ldots,x_n]\big)$ a des propriétés additionelles, qu'est-ce que l'on peut dire à propos son groupe d'isotropie $\mathrm{Aut}(D)$?*

# Dérivations

## Définition

Si $B$ est un $\mathbb{k}$-domaine, une *dérivation* est une transformation linéaire $D : B \to B$ telle que $D(ab) = D(a)b + aD(b)$.
Le *noyau* de $D$, noté $\ker(D)$, est son noyau autant que TL.

## Lemma

1. $\ker(D) \subset B$ *est une sous-algèbre, algébriquement close, telle que* $\mathrm{Frac}\big(\ker(D)\big) \cap B = \ker(D)$.
2. $\mathrm{Aut}_{\mathbb{k}}(B)$ *agît par conjugaison sur* $\mathrm{Der}(B)$.
3. $\mathrm{Der}(B)$ *est un* $B$*-module et il est une algèbre de Lie:* $aD, DE - ED \in \mathrm{Der}(B)$ *pour tous* $a \in B, D, E \in \mathrm{Der}(B)$.

# Quelques classes intéressantes de dérivations

## Définition

- Une dérivation est *simple* si les seules idéaux $I \subset B$ *D-stables* (c-à-d $D(I) \subset I$) sont les triviaux.
- $D \in \mathrm{Der}\big(\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]\big)$ es *localement finie* si elle l'est comme TL:

$$\dim_{\Bbbk} \big\langle a, D(a), \ldots, D^n(a), \ldots \big\rangle_{\Bbbk} < \infty \text{ pour tout } a \in B.$$

- $D \in \mathrm{Der}\big(\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]\big)$ est *localement nilpotente* (*LND* par son acronyme en anglais) si pour tout $a \in B$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $D^n(a) = 0$ — en particulier, localement nilpotente implique localement finie.

# Exemples

1. $\sum a_i \partial_{x_i}$, $a_i \in \Bbbk$ est une LND de $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$.
2. Toute *dérivation triangulaire* $D = \sum a_i \partial_{x_i}$, $a_i \in \Bbbk[x_{i+1}, \ldots, x_n]$ est LND.
3. $0 \neq D : \Bbbk[z] \to \Bbbk[z]$ est LND si et seulement si $D$ est simple, si et seulement si $D = c\partial_z$ pour $c \in \Bbbk^*$.
4. Si $D = \sum_{i=2}^{n} a_i \partial_{x_i}$, alors $D$ n'est pas simple.

**Théorème (Shamsuddin, 1979)**

*Soit $\delta : B \to B$ une dérivation simple. Soit $D : B[y] \to B[y]$ l'extension par $D(y) = ay + b$. Alors $D$ est simple si et seulement si $\delta(h) \neq ah + b$ pour tout $h \in B$.*

# Groupes et géométrie

## Définition (PGA)

Un *groupe algébrique (affine)* est un groupe $(G, m, \iota, 1_G)$, dont $G$ est une variété algébrique (affine), et $m : G \times G \to G$ et $\iota : G \to G$ des morphismes de variétés.

## Théorème (Demazure-Gabriel)

*Tout groupe algébrique affine est un sous-groupe fermé de* $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ *pour un certain* $n$*.*

- fermé = $\mathcal{V}(f_1, \dots f_n)$, $f_i \in \Bbbk[a_{11}, \dots, a_{nn}]$ (zéros communs).
- (PGA) La structure de groupe algébrique affine de $G$ se correspond avec une structure d'algèbre de Hopf sur $\Bbbk[G]$.

# Quelques exemples

1. $GL_n(\mathbb{C})$ est un groupe algébrique affine, car le produit et l'inverse sont donnés par des polynômes (avec les coefficients des matrices et $\frac{1}{\det}$ comme variables).
2. $\mathbb{G}_a = (\mathbb{C}, +)$, est un groupe algébrique affine, car l'addition $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $+(z, z') = z + z'$ et la soustraction sont polynomiaux.
3. Le *tore algébrique* $\mathbb{T}_n = (\mathbb{C}^*)^n$ est un groupe algébrique.

- EXERCICE: trouver (un) $GL_n(\mathbb{k})$ pour $\mathbb{G}_a$ et $\mathbb{T}_n$.

# Actions régulières

**Définition**

Une *action régulière* du groupe algébrique $G$ sur la variété algébrique $X$ est une action $\varphi : G \times X \to X$ qui est aussi un morphisme de variétés algébrique. On note $\varphi(a, x) = a \cdot x$.

Quand $X = \mathbb{A}^n$, une action régulière de $G \subset \mathrm{GL}_\ell(\Bbbk)$ est une action $\varphi : G \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ telle que $(a_{ij}) \cdot (x_1, \dots, x_n) =$

$$\left(f_1(a_{11}, \dots, a_{\ell\ell}, \tfrac{1}{\det}, x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(a_{11}, \dots, a_{\ell\ell}, \tfrac{1}{\det}, x_1, \dots, x_n)\right),$$

$f_1, \dots, f_n \in \Bbbk[z_1, \dots, z_{\ell^2+1+n}]$

*à suivre...*

# Actions de groupes algébriques sur $\mathbb{C}^n$

- Donner une action régulière de $G$ sur $\mathbb{A}^n$ est équivalent a donner une action de $G$ sur $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$, par des automorphismes d'algèbres: $\varphi : G \times \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$, telle que $\varphi(g, -) : \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ est un automorphisme pour tout $g \in G$ *plus une condition "géométrique" sur la variation selon g*: (PGA) L'action de $G$ sur $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ est une représentation rationelle.
- Donner une action (abstraite) de $G$ sur $\mathbb{A}^n$ est équivalent à donner un morphisme de groupes $G \to \mathrm{Biy}(\mathbb{A}^n)$.
- Donner une action régulière de $G$ sur $\mathbb{A}^n$ est équivalent à donner un morphisme de groupes $G \to \mathrm{ACr}(n)$ *"géométrique" — dans un sens qu'on ne verra pas pour l'instant*.

# Un petit rapel d'actions

## Définition

Si $G$ agît sur $X$, le *(sous-groupe de) isotropie* de $x \in X$, est

$$G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$$

Le groupe $G$ *agit librement* si $G_x = \{1_G\}$ por tout $x \in X$.

$x \in$ est un *point fixe* (de l'action) par $G$ si $g \cdot x = x$ pour tout $g \in G$ — c-à-d, si $G_x = G$.

Si l'action est régulière, $G_x \subset G$ est un sous-groupe fermé.

# Exemples

- Si $v \in \mathbb{A}^n$, l'*action de $\mathbb{G}_a$ par translation* $t_v : \mathbb{G}_a \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$, $a \cdot x = x + av$ est régulière et libre (si $v \neq 0$).
- Une représentation de $G$ est donné par un morphisme $G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$, ce qui est équivalent à une action linéaire régulière $G \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$. On a $G_0 = G$: 0 est un point fixe.
- En particulier, l'action du tore $\mathbb{C}^*$ par homothéthies est régulière. Si $x \neq 0$, on a $(\mathbb{C}^*)_x = \{1\}$.
- $G_a \times \mathbb{k}^2 \to \mathbb{k}^2$, donnée par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x+ay \\ y \end{smallmatrix}\right)$ a une infinité de points fixes.

# Actions de $\mathbb{G}_a$ et LND

## Un exemple très important pour la suite

- Soit $\mathbb{G}_a \subset \mathrm{ACr}(n)$ — produit par exemple avec une action de $\mathbb{G}_a$ sur $\mathbb{A}^n$ —; alors

$$D(f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(t \cdot x)\ ,\ f \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$$

  est une dérivation.
- En fait, comme $f(t \cdot x) \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n, t]$, il est facile à voir que $D$ est LND:

$$\text{si } m = \deg_t\big(f(t \cdot x)\big), \text{ alors } D^{m+1}(f) = 0.$$

# Un exemple

Soient $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{A}^n$ et $G_a \subset \mathrm{ACr}(n)$ le groupe des translations par $tv$:

$$\{x \mapsto t{\cdot}x = x{+}tv : t \in \Bbbk\} = \left\{(x_1{+}tv_1, \dots, x_n{+}tv_n) : t \in \Bbbk\right\} \subset \mathrm{ACr}(n).$$

Alors

$$D(x_i) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (x_i + tv_i) = v_i \ , \ i = 1, \dots, n$$

et

$$D = \sum v_i \partial_{x_i}.$$

# LND et actions de $\mathbb{G}_a$

## La réciproque

- Si $D \in \operatorname{Der}\big(\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]\big)$ es LND, alors la série formelle

$$e^{tD} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} D^j$$

  induit un morphisme
  $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \to \Bbbk[x_1, \ldots, x_n][t] \cong \Bbbk[t, x_1, \ldots, x_n]$
- PGA Ce morphisme correspond à morphisme $\mathbb{G}_a \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$, qui est en fait une action (car $e^{(t+t')D} = e^{tD} e^{t'D}$).

# Un exemple

$D = y\partial_x$ est un LND de $\Bbbk[x, y]$, avec

$$e^{tD}(x) = x + yt,\ e^{tD}(y) = y.$$

Avec morphisme associé $p(x, y) \mapsto p(x + ty, y)$. L'action produite est

$$t \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+ty \\ y \end{pmatrix}$$

Il est à noter que ce n'est pas une translation (c-à-d conjugé à une translation), car les points $(x, 0)$ sont des points fixes par l'action.

# Orbites et isotropie

## L'action de $\mathrm{ACr}(n)$ sur $\mathrm{Der}\big(\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]\big)$

- Si $E = f \cdot D = f \cdot \big(D(f^{-1} \cdot -))\big)$, alors on peut penser $E$ et $D$ comme "la même dérivation vue après un changement de variables par l'automorphisme $f$".
- On note $\mathrm{Aut}(D) = \mathrm{ACr}(n)_D$, on l'appelle le *groupe des automorphismes de D*.
- L' orbite $\mathcal{O}_{\mathrm{ACr}(n)}(D)$, qui est donc l'ensemble des dérivations équivalentes à changement de variables près, se correspond comme $\mathrm{ACr}(n)$-ensemble au quotient $\mathrm{ACr}(n)/\,\mathrm{Aut}(D)$. ...
- Donc....

# Notre problème est relié a la géometrie de $\mathrm{ACr}(n)$

Même si $G \subset \mathrm{ACr}(n)$ est un sous-groupe fermé, la géométrie du quotient $\mathrm{ACr}(n)/G$ est difficile à décrire. Dans le cas particulière d'une dérivation $D$, l'étude de $\mathrm{Aut}(D)$ donne des informations sur ce quotient.

## Questions

- *Supposons que le groupe* $\mathrm{Aut}(D)$ *des automorphismes d'une dérivation D est algébrique; qu'est-ce que l'on peut dire sur* $\cancel{D}$ *l'orbite* $\mathrm{ACr}(n)/\mathrm{Aut}(D)$ *de la dérivation D ?*
- *À la réciproque, si* $D \in \mathrm{Der}\left(\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]\right)$ *et donc tout élément de sa classe* $\mathrm{ACr}(n)/\mathrm{Aut}(D)$ *a des propriétés additionelles, qu'est-ce que l'on peut dire à propos son groupe d'isotropie* $\mathrm{Aut}(D)$*?*

# Actions de $\mathbb{G}_a$ et LND

$\mathbb{G}_a$ jouera un rôle important dans la suite

## Théorème

- *Soit $X$ une variété algébrique affine. Donner une action de $\mathbb{G}_a$ est équivalente à donner une dérivation localement nilpotente de $\Bbbk[X]$.*
- *Si $\mathbb{G}_a$ agit sur $X$, $\dim X \geq 2$, alors il existent une infinité de dérivations localement nilpotentes de $X$.*

En particulier,

## Lemma

*Soient $D \in \operatorname{Der}\big(\Bbbk[x_1, \dots, x_n]\big)$ et $E$ une LND. On considère $H = \{e^{tE} : t \in \mathbb{G}_a\} \subset \operatorname{ACr}(n)$, Alors $H \cong \mathbb{G}_a$, et $H \subset \operatorname{Aut}(D)$ si et seulement si $[D, E] = 0$.*

# Si $D \in \mathrm{Der}(B)$ est LND, alors il existe une infinité des LND

Pour $B$ de type fine, avec $\mathrm{tr.\,dgr}_{\Bbbk}(B) \geq 2$ — par exemple $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$, $n \geq 2$

- Si $D \in \mathrm{Der}(B)$ est LND, alors $\mathrm{Ker}(D) \subset B$ est une sous-algèbre, telle que $\mathrm{tr.\,dgr}_{\Bbbk} \mathrm{Ker}(D) = \mathrm{tr.\,dgr}_{\Bbbk}(B) - 1$.
- Si $f \in \ker(D)$, alors $fD$ is localement nilpotente car

$$(fD)^i(g) = f^i D^i(g)$$

.

- $\mathrm{Ker}(D)D \subset LND$, donc $\dim_{\Bbbk} LND = \infty$

# $\mathrm{ACr}(n)$ est un ind-variété, l'estructure de groupe est compatible

## $\mathrm{ACr}(n)$ n'est pas un groupe algébrique

Pour donner du sens au titre on doit:

- Définir ind-variété.
- Établir notre cadre géométrique: quelle structure géométrique sert à nos buts?
- Montrer que $\mathrm{ACr}(n)$ ne peut pas être un groupe algébrique dans ce cadre, mais qu'il est bien un ind-groupe.

# Ind-variétés affines

## Définition

Un ensemble $X$ admet une structure d'*ind-variété* s'il existe une famille dénombrable de variétés $X_i$ et des inclusions $\iota_i : X_i \to X$ tels que:

1. $X = \bigcup_i \iota_i(X_i)$
2. $\iota_i(X_i) \subset \iota_{i+1}(X_{i+1}) \cong X_{i+1}$
3. $\iota_i : X_i \to X_{i+1}$ est une immersion fermée.

Si tous les $X_i$ sont affines, on dit que $X$ est une *ind-variété affine*.

Donc une ind-variété $X$ est filtré par une union croissante de variétés, qui sont des ensembles fermés.

# La topologie d'une ind-variété

Si $X$ est un ind-variété, on peut définir plus d'une topologie qui "fais du sens géométrique" . On choisit la suivante:

## Définition

Si $X = \bigcup X_i$ est une ind-variété, $Z \subset X$ est fermé si $Z \cap X_i \subset X_i$ est fermé pour tout $i$.

## Lemma

*Un sous-ensemble fermé $Z \subset X$ est un variété algébrique si et seulement si, il existe i tal que $Z \subset X_i$, sous-variété fermée.*

# Le choix de la filtration

## Définition

Si $X = \bigcup_i X_i$ et $Y = \bigcup_j Y_j$ sont des ind-variétés, $f : X \to Y$ est un *morphisme (des ind-variétés)* si por tout $i$, il existe $j$ tal que $f(X_i) \subset Y_j$ et $f|_{X_i} : X_i \to Y_j$ est un morphisme de variétés algébriques.

En particulier, $f$ est continue.

## Proposition

*Soit $X$ un espace topologique et $X = \bigcup_i X_i = \bigcup Y_j$ deux filtrations de sorte que la structure de $X$ comme ind-variété induit la topologie de $X$. Alors les structures sont isomorphes — c-à-d pour tout $i$ il existe $j$ tel que $X_i \subset Y_j$ et réciproquement.*

# Des exemples

1. Toute variété algébrique
2. $\mathbb{Z} = \bigcup \{-n, \ldots, n\}$
3. $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \Bbbk = \bigcup \underbrace{\Bbbk \times \cdots \times \Bbbk}_{i \text{ fois}} \times \{0\} \times \cdots$
4. $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n] = \bigcup \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]_i$, où $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]_i$ est l'espace des polynômes de degré total $\leq i$.
5. $\mathrm{ACr}(n)$, et le groupe des automorphismes de de Jonquières est un sous-groupe fermé, donc un ind-groupe.

# Sous-groupes de $\mathrm{ACr}(n)$

## Définition

Un automorphisme $f \in \mathrm{ACr}(n)$ est dit *algébrique* si $\overline{\langle f^i : i \in \mathbb{Z} \rangle} \subset \mathrm{ACr}(n)$ est un sous-groupe algébrique.

## Théorème

*Un sous-groupe fermé $G \subset \mathrm{ACr}(n)$ est algébrique si et seulement si le degré de ses éléments est borné.*
*En particulier, un automorphisme $f \in \mathrm{ACr}(n)$ est algébrique si et seulement si le degrée de ses puissances est borné.*

## Exemple

Le sous-groupe des automorphismes de de Jonquières n'est pas algébrique.

# $\mathrm{ACr}(n)$ est une ind-variété

## Une preuve directe

**Théorème (Shafarevich, Furter-Kraft)**

- $\mathrm{End}\left(\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]\right)$ *est une ind-variété, c'est un ind-monoïde.*
- *Le sous-monoïde des morphismes dominants* $\mathrm{Dom}(\mathbb{A}^n) \subset \mathrm{End}\left(\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]\right)$ *est ouvert.*
- $\mathrm{ACr}(n)$ *est fermé dans* $\mathrm{Dom}\left(\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]\right)$*.*

- $\mathrm{End}\left(\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]\right) = \left(\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]\right)^n$.
- Bases de Gröbner plus de l'algèbre linéaire.

Cette preuve donne mois d'infos que la description des sous-groupes algébriques.

# Merci!

Prochaîne séance: demain matin avec Ivan au tableau!