

Presentations of arithmetic groups and applications

Benoit Loisel ^{*} and Claudio Bravo [†]

Résumé

Table des matières

1	Présentation d'un groupe et groupes libres (45min Benoit)	2
1.1	Introduction aux présentations de groupes	2
1.2	Groupe libre et présentation de groupes	2
1.3	Présentation de groupes	3
1.4	Exemples de présentations de groupes	3
1.5	Retour aux morphismes : propriété universelle des groupes libres	5
2	Produits amalgames, libres et énoncé du Théorème de Nagao (45min Claudio Bravo)	5
2.1	Limites inductives et amalgames	5
2.2	Exemples	6
2.3	Applications	6
3	L'arbre de Bruhat-Tits de $(P)SL_2(K)$ (45min Benoit Loisel)	7
3.1	Corps valués	7
3.2	Réseaux	8
3.3	L'arbre de Bruhat-Tits	9
3.4	Action sur l'arbre de Bruhat-Tits	11
4	Preuve du Thm de Nagao, Interprétation via les fibrés en droites et applications au Théorème de Grothendieck-Birkhoff (45min Claudio Bravo)	12
4.1	Arbres et amalgames. Preuve du Thm de Nagao	12
4.2	Interprétation via les fibrés en droites	13
4.3	Applications au Théorème de Grothendieck-Birkhoff	14
5	Généralisation à SL_n : Immeubles et le Théorème de Soulé (60min BL et CB)	14
5.1	Variété de drapeaux	15
5.2	L'immeuble affine de $SL_n(K)$	16
5.3	Construction de l'immeuble avec les réseaux	17
5.4	Généralisation de Nagao à SL_n : le théorème de Soulé	18

^{*}Université de Poitiers, CNRS, LMA, Poitiers, France. Email: benoit.loisel@math.univ-poitiers.fr

[†]Universidad de Talca, Instituto de Matemáticas, Talca, Chile. Email: claudio.bravo@utalca.cl

1 Présentation d'un groupe et groupes libres (45min Benoit)

1.1 Introduction aux présentations de groupes

Si on veut comprendre une application linéaire, il suffit de la comprendre sur une base. Pour les groupes, on procède de manière analogue en cherchant des parties génératrices. Rappelons la définition :

1.1 Définition. On dit qu'une partie S d'un groupe G est génératrice si pour tout $g \in G$ tel que $g \neq 1$, il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et des éléments $s_1, \dots, s_n \in S$ tels que $g = \prod_{i=1}^n s_i$ où le produit vide est l'élément neutre de G .

Si φ est un morphisme et qu'on connaît $\varphi(s)$ pour tout $s \in S$, on connaît entièrement φ car pour tout $g = s_1 \dots s_n \in G$, on sait que $\varphi(g) = \varphi(s_1) \cdot \dots \cdot \varphi(s_n)$.

Question : Supposons qu'on connaisse un groupe G et une partie génératrice S , est-ce suffisant de donner des valeurs $\varphi(s)$ pour $s \in S$ pour définir un morphisme φ ?

Réponse : Non. Par exemple pour le groupe $G = \mathfrak{S}_n$, si on veut trouver les morphismes $G \rightarrow \mathbb{C}^*$, on ne peut pas poser n'importe quoi pour $\varphi(\sigma)$. En effet, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a $\sigma^{n!} = \text{id}$ (sigma puissance N factoriel est égal à l'identité) donc on aura aussi $1 = \varphi(\sigma^{n!}) = \varphi(\sigma)^{n!}$. Donc, on sait que $\varphi(\sigma)$ doit nécessairement être une racine de l'unité.

Et comme \mathfrak{S}_n est engendré par les transpositions, l'image de chaque transposition doit être ± 1 donc il ne suffit pas de prescrire n'importe quelle racine de l'unité pour chaque $\sigma \in S$.

Ça veut dire que pour définir des morphismes à partir de leurs valeurs, il faut tenir compte des relations entre les éléments.

1.2 Groupe libre et présentation de groupes

1.2 Définition. Soit S un ensemble. On peut considérer l'ensemble des mots en les éléments de S muni de la loi de concaténation, mais ça n'est pas tout à fait un groupe. On parle de monoïde. Pour en faire un groupe, il faut aussi considérer les inverses des éléments de S , cela définit un ensemble

$$F_S = \{\varepsilon\} \sqcup \{s_1^{a_1} \dots s_n^{a_n} \mid n \in \mathbb{N}, s_1, \dots, s_n \in S, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, s_i \neq s_{i+1}\}$$

où ε est le mot "vide". On fait alors F_S un groupe en le munissant de la loi de concaténation-simplification, c'est-à-dire qu'on concatène les mots ; que quand on écrit s^0 , on le retire ; et quand on écrit $s^a s^b$, on le simplifie en s^{a+b} .

F_S s'appelle le groupe libre sur l'ensemble S .

Si $S = \llbracket 1, n \rrbracket$ on note plus simplement F_n le groupe libre engendré par n éléments.

1.3 Exemple. (1) $F_1 \simeq \mathbb{Z}$

(2) F_2 peut se voir comme l'ensemble des mots

$$\{a^{k_0} b^{k_1} a^{k_2} \dots b^{k_{2n+1}} \mid n \in \mathbb{N}, k_0, k_{2n+1} \in \mathbb{Z}, k_1, \dots, k_{2n} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}.$$

L'intérêt de cette définition réside dans la propriété universelle suivante :

1.4 Théorème (Propriété universelle du groupe libre sur S). *Soit S un ensemble. Pour tout groupe H et toute application $\varphi : S \rightarrow H$, il existe un groupe F , unique à un unique isomorphisme près, et une application $\iota : F \rightarrow H$ injective telle que pour toute application $f : S \rightarrow H$, il existe une unique morphisme de groupes $\varphi : F \rightarrow H$ tel que $\varphi \circ \iota = f$.*

Par construction, le groupe F_S est alors la solution de ce problème universel.

Démonstration. **Faire la preuve** □

1.5 Notation. En particulier, si S, S' sont deux ensembles finis à n éléments, alors F_S et $F_{S'}$ sont isomorphes. On notera F_n un représentant de cette classe d'isomorphismes des groupes libres sur un ensemble à n éléments.

1.3 Présentation de groupes

Si R est une partie d'un groupe libre F_S , on a envie de voir ces mots comme des relations. Le problème est que R n'est pas forcément distingué dans F_S . On considère alors la clôture normale de R dans F_S , c'est-à-dire le plus petit sous-groupe normal de F_S contenant R

$$\langle\langle R \rangle\rangle := \langle\langle R \rangle\rangle_{F_S} = \bigcap_{R \subseteq N \triangleleft F_S} N = \langle grg^{-1} \mid g \in F_S, r \in R \rangle.$$

1.6 Définition (Présentation d'un groupe). On peut alors définir un groupe

$$\langle S \mid R \rangle = F_S / \langle\langle R \rangle\rangle.$$

On dit que le groupe $F_S / \langle\langle R \rangle\rangle$ est le groupe **présenté** par les générateurs S et les relations R .

Et dans l'autre sens ?

1.7 Définition. Si on se donne un groupe G et si S est une partie génératrice de G , et que R sont des mots en les éléments de S , on dit que $\langle S \mid R \rangle$ est une **présentation** de G si G est isomorphe à $\langle S \mid R \rangle$.

Si on part d'un groupe G , on se demande alors s'il est possible de trouver des ensembles S et $R \subseteq F_S$ tels qu'on ait une présentation

$$G = \langle S \mid R \rangle.$$

C'est bien entendu toujours possible de manière naïve en prenant $S = G$ dont on peut écrire les éléments $S = \{s_g \mid g \in G\}$ et les relations

$$R = \{s_{g_1} \cdots s_{g_n} \in F_S \mid g_1 \cdots g_n = e_G\},$$

mais ça n'est pas très commode pour répondre à des problèmes tels que la construction de morphismes.

On va donc chercher des présentations avec S et R "aussi petits que possible".

1.4 Exemples de présentations de groupes

(1) Le groupe cyclique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est présenté par

$$\langle \{a\} \mid a^n \rangle.$$

(2) Pour le groupe symétrique, \mathfrak{S}_n , on sait que est engendré par les transpositions $s_i = (i \ i+1)$ pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et on a alors la présentation

$$\mathfrak{S}_n = \langle \{s_1, \dots, s_{n-1}\} \mid \{(s_i)^2, (s_i s_{i+1})^3, (s_i s_j)^2 \ \forall i, \forall j \neq i \pm 1\} \rangle.$$

Mais on sait aussi que $\mathfrak{S}_n = \langle \tau = (1 \ 2), c = (1 \ 2 \ \dots \ n) \rangle$ est une famille de deux générateurs. On a alors la présentation

$$\mathfrak{S}_n = \langle \{\tau, c\} \mid \{\tau^2, \tau^n, (c\tau)^{n-1}, (\tau c^{-1} \tau c)^3, (\tau c^{-j} \tau c^j) \ \forall j \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket\} \rangle.$$

1.8 *Remarque.* On a obtenu deux présentations différentes du même groupe et c'est un problème ouvert en général de décider si deux présentations définissent, à isomorphisme près, le même groupe.

Plus surprenant, si on se donne un groupe présenté par $\langle S \mid R \rangle$ et un mot w sur l'alphabet S , c'est un problème ouvert de savoir à quelle(s) condition(s) sur (S, R) il existe un algorithme qui décide si w est trivial ou non. On appelle ce problème le **Problème du mot**. Il existe des exemples de groupes présentés $\langle S \mid R \rangle$ et de mots $w \in F_S$ pour lesquels on a démontré que le problème du mot était indécidable.

(3) Soit S un ensemble fini non vide et $M = (m_{s,t})_{s,t \in S} \in \mathcal{S}_S(\mathbb{Z} \cup \{\infty\})$ **C : qu'est que ce $\mathcal{S}_S()$??** une matrice symétrique à coefficients entiers supérieurs à 2 ou le symbole ∞ telle que :

- M est de diagonale 1, i.e. $\forall s \in S, m_{s,s} = 1$;
- les coefficients non diagonaux de M sont supérieurs ou égaux à 2, avec par convention $\infty > 2$.

Prenons

$$R = \{(st)^{m_{s,t}} \mid s, t \in S, m_{s,t} \neq \infty\}.$$

Alors $W = \langle S \mid R \rangle$ s'appelle un groupe de Coxeter (de type fini).

Par exemple, la présentation de \mathfrak{S}_n avec les transpositions $(i \ i + 1)$ en fait un groupe de Coxeter (fini).

1.9 Théorème (Tits, 1967). *Le problème du mot est résoluble dans les groupes de Coxeter de type finis.*

(4) Les groupes diedraux sont des exemples importants de groupes de Coxeter. Soit $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \sqcup \{\infty\}$. Le n -ème groupe Diedral qu'on notera D_n (certains le notent D_{2n} car il est de cardinal $2n$) est par définition le groupe des isométries du n -gone régulier euclidien où, par convention, le ∞ -gone régulier est la droite graduée.

En prenant pour s et t les réflexions consécutives par rapport à un sommet et le milieu d'une arête, on obtient une famille de générateurs de D_n qui vérifie

$$s^2 = t^2 = (st)^n = \text{id}.$$

Il s'avère que $R = \{s^2, t^2, (st)^n\}$ est en fait une famille de relations pour le groupe D_n et la famille de générateurs $S = \{s, t\}$.

Si on note $M = \begin{pmatrix} 1 & n \\ n & 1 \end{pmatrix}$, alors D_n est alors le groupe de Coxeter associé à la matrice M .

(5) Plus difficile : Le groupe modulaire

$$\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\} / \{\pm I_2\}$$

est engendré par les deux éléments $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et est présenté par

$$\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \langle \{S, T\} \mid \{S^2, (ST)^3\} \rangle.$$

C'est un théorème qui peut se démontrer en regardant l'action de ce groupe sur le disque de POINCARÉ

1.5 Retour aux morphismes : propriété universelle des groupes libres

Un intérêt des présentations de groupes est qu'on peut alors définir les morphismes $\varphi : G \rightarrow H$ uniquement grâce aux valeurs sur une famille de générateurs de G .

1.10 Théorème. Soit G un groupe de présentation $\langle S | R \rangle$. Alors pour tout groupe H et toute application $f : S \rightarrow H$ telle que pour tout mot $r = s_1 \dots s_m \in R$, le produit $f(s_1) \dots f(s_m)$ est l'élément neutre de H , alors il existe un unique morphisme $\varphi : G \rightarrow H$ prolongeant f .

Si H est engendré par $f(S)$, alors H est isomorphe à un quotient de $\langle S | R \rangle$.

Ainsi, à partir d'une présentation d'un groupe, on peut décider quels sont les morphismes vers un autre groupe donné en étudiant certaines relations combinatoires.

Question : Mais comment chercher des présentations d'un groupe donné ?

C'est difficile en général. Des techniques avancées utilisent souvent des résultats d'homologie et de cohomologie en faisant agir un groupe "convenablement" (proprement, librement, etc.) sur un espace convenable. Sous de bonnes hypothèses, il devient possible de relier la géométrie, notamment le groupe fondamental de l'espace sur lequel on fait agir le groupe, au groupe lui-même et à ses présentations. Ce sont ces techniques qu'on va esquisser dans ce cours.

2 Produits amalgames, libres et énoncé du Théorème de Nagao (45min Claudio Bravo)

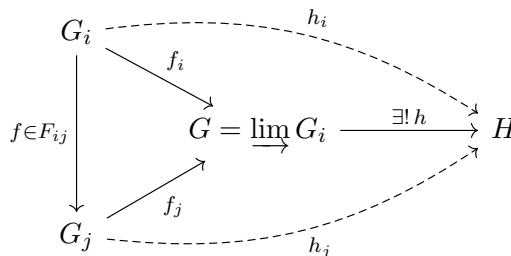
L'objectif de cette section est de servir d'introduction aux produits amalgamés de groupes. Nous commencerons par faire quelques rappels sur les limites de groupes, qui nous seront utiles pour introduire les amalgames

2.1 Limites inductives et amalgames

On se donne une famille $(G_i)_{i \in I}$ de groupes, et, pour tout couple (i, j) , un ensemble F_{ij} d'homomorphismes de G_i à G_j .

2.1 Définition. La limite inductive $G = \varinjlim G_i$ des G_i , relativement aux F_{ij} , est un groupe muni d'une famille d'homomorphismes $f_i : G_i \rightarrow G$ tels que $f_j \circ f = f_i$, pour tout $f \in F_{ij}$ avec la propriété universelle suivante :

Si H est un groupe, et si $h_i : G_i \rightarrow H$ est une famille d'homomorphismes tels que $h_j \circ f = h_i$, pour tout $f \in F_{ij}$, il existe un homomorphisme $h : G \rightarrow H$ et un seul tel que $h_i = h \circ f_i$.



2.2 Proposition. Le groupe G muni de la famille $(f_i)_{i \in I}$ existe et est unique, à isomorphisme unique près.

Preuve. L'unicité résulte (comme d'habitude) de la propriété universelle (Exercice). Alors, on va démontrer l'existence. On peut, par exemple, définir G par générateurs et relations de la manière suivante : On prend comme famille génératrice la somme disjointe $\bigoplus_{i \in I} G_i$ et comme des relations : d'une part les xyz^{-1} , où $x, y, z \in G_i$ et $z = xy$, et d'une autre part les xy^{-1} , où $x \in G_i, y \in G_j$ et $y = f(x)$ pour certain $f \in F_{ij}$. \square

2.3 Exemple et Définition. On se donne un groupe A , une famille des groupes $(G_i)_{i \in I}$ et, pour tout $i \in I$, un homomorphisme injectif $\iota_i : A \rightarrow G_i$. On va identifier A avec son image dans chacun des groupes G_i . La limite inductive des $(A, G_i)_{i \in I}$ relative aux $(\iota_i)_{i \in I}$ s'appelle la somme des G_i amalgamée par A . Elle s'écrit par $*_A G_i$.

2.2 Exemples

2.4 Exemple et Définition. Si $A = \{e\}$, alors le groupe $*_A G_i$ s'appelle le produit libre des G_i et il s'écrit par $*G_i$.

2.5 Exemple. Le groupe libre F_S est le produit libre de $*G_i$ où $I = S$ et $G_i = \mathbb{Z}$.

2.6 Exemple. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un le produit amalgamé de $\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \right) \rangle$ et $\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \right) \rangle$ amalgamés par s'intersection $Z = \{\pm \mathrm{id}\}$. C'est à dire : $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *_Z / 2\mathbb{Z} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

2.7 Exemple. [Ser03, Ch. I, §4.2] Le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ est isomorphe au produit libre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, en passant au cocient le produit amalgamé d'exemple précédent. Observe que $\overline{\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \right)} = ST$, dans l'exemple 1.4(5).

2.8 Exemple. [Ser03, Ch. II, §1.4, pag. 110] Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[1/p])$ est isomorphe à la somme de deux copies de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ amalgamées par le sous-groupe $\Gamma_0(p) := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \mid ad - bc = 1, c \equiv 0(p) \right\}$.

2.9 Exemple (Théorème de Ihara). [Ser03, Ch. II, §1.4, Cor. 1] Soit $K = \mathbb{Q}$ et ν la valuation p -adique (ou plus généralement soit K un corps muni d'une valuation discrète ν) et soit $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}$ son anneau des entières avec $\varpi = p \in \mathcal{O}_K$ un paramètre uniformisant. Alors, le groupe $\mathrm{SL}_2(K)$ est isomorphe à la somme de deux copies de $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_K)$ amalgamées par le sous-groupe $\Gamma_0(\varpi) := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \mid ad - bc = 1, c \equiv 0(\varpi) \right\}$.

L'un des objectifs de ce mini-cours est de démontrer la décomposition suivante

2.10 Exemple (Théorème de Nagao). [Ser03, Ch. II, §1.6] Soit F un corps et $F[t]$ l'anneau des polynomes dans la variable t . Le groupe $\mathrm{GL}_2(F[t]) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \mid a, b, c, d \in F[t], ad - bc \in F^* \right\}$ se décompose comme le produit amalgamé $\mathrm{GL}_2(F) *_B(F) B(F[t])$, où $B(R) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix} \right) \mid a, d \in R^*, b \in R \right\}$.

2.3 Applications

2.11 Question. *A quel type d'étude ou description serve les produits amalgamés ?*

Réponse : Présentations des groupes. Pour montrer ca, on va définir la notion des mot réduit. Pour tout $i \in I$, on choisit un ensemble des représentant S_i des classes à droite de $G_i \bmod A$ et l'on suppose que $e \in S_i$. L'application $(a, s) \mapsto as$ est donc une bijection de $A \times S_i$ sur G_i appliquant $A \times (S_i \setminus \{e\})$ sur $G_i \setminus A$.

Soit $\underline{i} = (i_1, \dots, i_n)$ une suite d'éléments de I vérifiant la condition suivante :

$$i_m \neq i_{m+1}, \text{ pour } 1 \leq m \leq n - 1. \quad (2.1)$$

2.12 Définition. On appelle mot réduit de type \underline{i} a une famille $m = (a; s_1, \dots, s_n)$, où $a \in A$, $s_1 \in S_{i_1}, \dots, s_n \in S_{i_n}$ et $s_j \neq e$, pour tout j .

On note f (resp. f_i) l'homomorphisme canonique de A (resp. G_i) dans le groupe $G = *_A G_i$ (voir Déf. 2.1).

2.13 Théorème. [Ser03, Ch. I, §I, Th. I] Pour tout $g \in G$, il existe une suite \underline{i} vérifiant Eq. (2.1) et un mot réduit $m = (a; s_1, \dots, s_n)$ de type \underline{i} tels que :

$$g = f(a) f_{i_1}(s_1) \cdots f_{i_n}(s_n). \quad (2.2)$$

De plus, \underline{i} et m sont uniques.

2.14 Exemple. En utilisant le théorème précédent ainsi que le théorème de Nagao, on peut démontrer que $\mathrm{GL}_2(F[t])$ n'est pas de type fini. En effet, chaque $g \in G = \mathrm{GL}_2(F[t])$ s'écrit de manière unique comme un produit de la forme (2.2). Comme chaque $s_j \in B(F[t])$ est de la forme $s_j = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, avec $\deg(b) < \infty$, on en déduit que $g \in \mathrm{GL}_2(F) *_B(F) B(F[t]_n)$, où $F[t]_n = \{p \in F[t] \mid \deg(p) \leq n\}$. Note que $B(F[t]_n)$ est un sous-groupe de $B(F[t])$ vu que $F[t]_n$ est un groupe aditif avec un action de F^* pour homotheties. Ainsi, $G = \bigcup_{n \geq 0} \mathrm{GL}_2(F) *_B(F) B(F[t]_n)$ est l'union d'une suite strictement croissante de groupes de type fini. En particulier, si G était de type fini, on aurait $G = \mathrm{GL}_2(F) *_B(F) B(F[t]_n)$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, ce qui est absurde.

3 L'arbre de Bruhat-Tits de $(P)SL_2(K)$ (45min Benoit Loisel)

3.1 Corps valués

3.1 Définition (Valuations). Soit K un corps. On appelle valuation (de rang 1) sur K une application $v : K \rightarrow \mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$ telle que :

$$(V1) \quad \forall x \in K, \quad v(x) = \infty \iff x = 0,$$

$$(V2) \quad v : K^\times \rightarrow \mathbb{R} \text{ est un homomorphisme de groupes,}$$

$$(V3) \quad \forall x, y \in K, \quad v(x + y) \geq \min(v(x), v(y)).$$

On dit que v est triviale (resp. discrète; resp. dense) si le groupe $v(K^\times)$ est trivial (resp. un sous-groupe discret non trivial de \mathbb{R} , donc isomorphe à \mathbb{Z} ; resp. un sous-groupe dense de \mathbb{R}).

3.2 Notation. Si K est un corps muni d'une valuation, on notera dans ce cours

$$— \mathcal{O} = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\},$$

$$— \mathfrak{m} = \{x \in K \mid v(x) > 0\},$$

$$— \kappa = \mathcal{O}/\mathfrak{m}.$$

3.3 Fait. L'ensemble \mathcal{O} est un anneau local d'idéal maximal \mathfrak{m} .

De plus, \mathcal{O} est un anneau de valuation discrète si, et seulement si, v est une valuation (de rang 1) discrète. Dans ce cas, on choisit $\varpi \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$, appelé **uniformisante**, de sorte que les idéaux de \mathcal{O} sont les (ϖ^n) pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Démonstration. **à ne pas faire à l'oral** Il est clair d'après les propriétés de v que \mathcal{O} est un sous-anneau de K et que \mathfrak{m} est un idéal de \mathcal{O} . De plus, $\mathcal{O}^\times = v^{-1}(\{0\})$ car c'est un sous-groupe de K^\times contenu dans \mathcal{O} et maximal pour cette propriété.

Si I est un idéal de \mathcal{O} qui n'est pas contenu dans \mathfrak{m} , alors I contient un élément de valuation 0 donc un élément inversible de \mathcal{O} . Ainsi \mathfrak{m} est l'unique idéal maximal de \mathcal{O} , donc \mathcal{O} est un anneau local.

Si, de plus v est discrète d'image $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, alors les idéaux de \mathcal{O} sont de la forme $v^{-1}(\{n\}) = \mathfrak{m}^n$ où $n \in \mathbb{N}$, parcourt l'image de v puisque contenir un élément de valuation exactement λ équivaut à les contenir tous puisque $\mathcal{O}^\times = v^{-1}(\{0\})$. Donc \mathcal{O} est un anneau de valuation discrète.

La réciproque est laissée en exercice. \square

3.4 Exemple. (0) Si K est un corps et v est triviale, alors $\mathcal{O} = K = \kappa$ car $\mathfrak{m} = 0$.

(1) Si $K = \mathbb{Q}$ et p est un nombre premier, alors la valuation p -adique v_p sur \mathbb{Q} est une valuation discrète.

On a :

- $\mathcal{O} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}\}$,
- $\mathcal{O}^\times = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}\}$,
- $\mathfrak{m} = \{\frac{a}{b} \mid a \in p\mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}\} = p\mathcal{O}$,
- $\kappa = \mathcal{O}/p\mathcal{O} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$,
- $\varpi = p$.

(2) L'unique extension de la valuation p -adique à $\overline{\mathbb{Q}}$ est une valuation dense de $\overline{\mathbb{Q}}$.

(3) Si $K = \mathbb{F}(T)$, alors

$$v(R(T)) = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid T^n R \in \mathbb{F}[T]\}$$

est une valuation appelée valuation T -adique.

On a :

- $\mathcal{O} = \{R \in \mathbb{F}(T) \mid 0 \text{ n'est pas un pôle de } R\}$,
- $\mathcal{O}^\times = \{R \in \mathbb{F}(T) \mid 0 \text{ n'est pas ni un zéro, ni un pôle de } R\}$,
- $\mathfrak{m} = \{R \in \mathbb{F}(T) \mid R(0) = 0\} = T\mathcal{O}$,
- $\kappa = \mathcal{O}/T\mathcal{O} \simeq \mathbb{F}$,
- $\varpi = T$.

(4) Si $K = \mathbb{F}(T)$ avec la valuation, pour $P, Q \in \mathbb{F}[T]$, $Q \neq 0$:

$$v\left(\frac{P}{Q}\right) = \begin{cases} \deg(Q) - \deg(P) & \text{si } P \neq 0, \\ \infty & \text{si } P = 0. \end{cases}$$

qu'on peut noter $v = -\deg$ où $\deg(0) = -\infty$ par convention. Comme on sait que $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ et $\deg(P+Q) \leq \deg(P) + \deg(Q)$, il est alors facile de voir que $-\deg$ est une valuation. On remarque également que

$$v(a_0 + \cdots + a_n T^n) = -\deg(a_0 + \cdots + a_n T^n) = -n = v_{T^{-1}}(T^n(T^{-n}a_0 + \cdots + a_n))$$

D'où $-\deg = v_{T^{-1}}$.

3.2 Réseaux

Soit K un corps valué de valuation discrète $v : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ et d'anneau d'entiers \mathcal{O} .

3.5 Définition. On appelle **réseau** L de K^2 un sous- \mathcal{O} -module libre de rang 2 qui engendre V .

Notons $\mathcal{R}(K^2)$ l'espace des réseaux sur K^2 .

3.6 Remarque. On peut montrer qu'il suffit de supposer que L est un \mathcal{O} -module de type fini qui engendre K^2 pour que L soit un réseau, puisque l'anneau \mathcal{O} est de valuation discrète donc principal.

3.7 Fait. Comme K est supposé commutatif, le groupe multiplicatif K^\times agit sur $\mathcal{R}(K^2)$ via

$$x \cdot (\mathcal{O}e_1 \oplus \mathcal{O}e_2) = \mathcal{O}xe_1 \oplus \mathcal{O}xe_2$$

qui est bien un réseau puisque (xe_1, xe_2) est une autre base de K^2 .

On note alors $\mathcal{V}(K^2) = \mathcal{R}(K^2)/K^\times$ l'ensemble des orbites.

On va maintenant faire de $\mathcal{V}(K^2)$ l'ensemble des sommets d'un graphe.

3.8 Lemme (Application du théorème des facteurs invariants).

Si $L = \mathcal{O}f_1 \oplus \mathcal{O}f_2$ et $L' = \mathcal{O}f'_1 \oplus \mathcal{O}f'_2$ sont deux réseaux de K^2 , alors il existe une base commune (e_1, e_2) de K^2 et des entiers relatifs $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $L = \mathcal{O}e_1 \oplus \mathcal{O}e_2$ et $L' = \mathcal{O}\varpi^a e_1 \oplus \mathcal{O}\varpi^b e_2$

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{M}_2(K)$ la matrice de passage de la base (f_1, f_2) à la base (f'_1, f'_2) de K^2 . Soit $\delta \in K^\times$ tel que $\delta M \in \mathcal{M}_2(\mathcal{O})$. Comme \mathcal{O} est un anneau principal, il existe des éléments $d_1 | d_2$ de \mathcal{O} et des matrices $P, Q \in \text{GL}_2(\mathcal{O})$ telles que

$$P\delta MQ^{-1} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

Donc $(e_1, e_2) := (P(f_1), P(f_2))$ et $(Q(f'_1), Q(f'_2))$ sont des \mathcal{O} -bases de L et L' respectivement telles que la matrice de passage entre ces bases peut donc s'écrire

$$\delta^{-1} \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\varpi^a & 0 \\ 0 & \beta\varpi^b \end{pmatrix}$$

où $\alpha, \beta \in \mathcal{O}^\times$ et $a, b \in \mathbb{Z}$. D'où le résultat dans la base (e_1, e_2) . □

Ainsi, si L, L' sont des représentants, on peut définir $d_0(L, L') = |b-a| \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ où $a, b \in \mathbb{Z}$ sont un couple d'entiers donné par l'énoncé précédent. On déduit facilement de la preuve précédente que cette quantité ne dépend pas de la base (e_1, e_2) choisie. On voit également que cette quantité est un invariant pour l'action de K^\times .

L'application d_0 passe alors au quotient et on peut donc définir une application :

$$\begin{aligned} d: \mathcal{V}(K^2) \times \mathcal{V}(K^2) &\rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ [L], [L'] &\rightarrow d_0(L, L') \end{aligned}$$

C'est en fait une distance sur $\mathcal{V}(K^2)$ mais ça n'apparaît pas évident. Si la réflexivité et la symétrie sont claires, il nous faut démontrer l'inégalité triangulaire.

3.3 L'arbre de Bruhat-Tits

On va pour cela définir le graphe $\mathfrak{X}(K^2)$ dont :

- les sommets sont les classes d'équivalences de réseaux $\mathcal{V}(K^2)$
- les arêtes sont les paires $\{[L], [L']\}$, telles que $d([L], [L']) = 1$.

3.9 Définition. On appelle **appartement** de $\mathfrak{X}(K^2)$ un sous-graphe de la forme $\mathbb{A}(e_1, e_2)$ où (e_1, e_2) est une K -base de K^2 et

$$\mathbb{A}(e_1, e_2) = \{[\mathcal{O}e_1 \oplus \varpi^b \mathcal{O}e_2] \mid b \in \mathbb{Z}\}$$

Le lemme précédent garanti que :

(A0) tous les appartements sont isomorphes au graphe de la droite graduée ;

(A1) deux éléments de $\mathcal{V}(K^2)$ sont toujours contenus dans un même appartement.

3.10 Lemme. *Si L est un réseau et $[L']$ une classe telle que $d([L], [L']) = 1$, alors on peut choisir le représentant L' de sorte que $L' \subseteq L$ et on a alors $L/L' \simeq \kappa$.*

Démonstration. Quitte à changer de base $L = \mathcal{O}e_1 \oplus \mathcal{O}e_2$ et $L' = \mathcal{O}\varpi^a e_1 \oplus \mathcal{O}\varpi^b e_2$. Quitte à permuter e_1 et e_2 , on peut supposer $b > a$ et comme $b - a = 1$, on a donc

$$L'' := \varpi^{-a} L' = \mathcal{O}e_1 \oplus \mathcal{O}\varpi e_2 \in [L']$$

qui vérifie $L'' \subset L$ et $L/L'' = \mathcal{O}/\varpi\mathcal{O}e_2 \simeq \kappa$ □

3.11 Théorème. $\mathfrak{X}(K^2)$ est un arbre et d est la distance usuelle sur ce graphe.

Démonstration. On voit par (A0) que tout appartement de $\mathfrak{X}(K^2)$ est connexe et que deux sommets sont toujours contenus dans un même appartement par (A1). Donc $\mathfrak{X}(K^2)$ est connexe.

Il s'agit de montrer que $\mathfrak{X}(K^2)$ ne contient pas de boucles. On va montrer que par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que si $[L_0], [L_1], \dots, [L_n]$ sont des classes telles que $d([L_i], [L_{i+1}]) = 1$ “sans retours”, c'est-à-dire que $\forall i, [L_{i+2}] \neq [L_i]$, alors on peut choisir les L_i de sorte que $\forall i, L_{i+1} \subset L_i$ et $L_i \not\subset \varpi L_0$.

D'après le lemme, on peut choisir des représentant vérifiant $L_0 \supset L_1 \supset \dots \supset L_n$ et $L_i/L_{i+1} \simeq \kappa$. On a donc le résultat en particulier pour $n = 1$ puisque $L_0/L_1 \simeq \kappa$ alors que $L_0/\varpi L_0 \simeq \kappa^2$. Procédons à l'hérédité.

Par hypothèse de récurrence $L_{n-1} \not\subset \varpi L_0$. Notons que $L_{n-1} \subset L_{n-2}$ de quotient κ nous dit qu'on peut écrire :

$$L_{n-2} = \mathcal{O}e_1 \oplus \mathcal{O}e_2 \quad \text{et} \quad L_{n-1} = \mathcal{O}e_1 \oplus \varpi\mathcal{O}e_2.$$

Donc $\varpi L_{n-2} \subset L_{n-1}$ et le quotient $L_{n-1}/\varpi L_{n-2}$ est une κ -droite du κ -espace vectoriel $L_{n-1}/\varpi L_{n-1} \simeq \kappa e_1 \oplus \kappa e_2$. De même, L_{n-1}/L_n est une κ -droite de $L_{n-1}/\varpi L_{n-1}$. Ce sont deux droites distinctes car sinon on aurait $[L_n] = [\varpi L_{n-2}] = [L_{n-2}]$, ce qu'on a exclu par hypothèse. Donc le plan $L_{n-1}/\varpi L_{n-1}$ est la somme directe directe de ces deux droites. Ainsi

$$L_{n-1} = L_n + \varpi L_{n-2} \equiv L_n \pmod{\varpi L_0}$$

Donc $L_n \not\subset \varpi L_0$.

Or $L_n \subset L_0$ donc $[L_n] \neq [L_0]$.

Ainsi, $\mathfrak{X}(K^2)$ ne contient aucune boucle et si $d([L], [L']) = n$ alors il existe un chemin de longueur n les reliant. Donc d est la distance de graphe sur l'arbre $\mathfrak{X}(K^2)$. □

3.12 Remarque. Le graphe $\mathfrak{X}(K^2)$ s'appelle l'arbre de Bruhat-Tits de SL_2 .

Les immeubles de Bruhat-Tits, pour des valuations discrètes sont, plus généralement définis par une liste d'axiomes (A0), (A1), (A2) et on a facilement le troisième

(A2) Si \mathbb{A} et \mathbb{A}' sont deux appartements de $\mathfrak{X}(K^2)$, alors il existe un isomorphisme de graphes $\iota : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ qui fixe $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$

On aurait aussi pu démontrer (A2) pour montrer que $\mathfrak{X}(K^2)$ est un arbre.

Essayons de mieux comprendre cet arbre.

3.13 Proposition. *Si $[L] \in \mathcal{V}(K^2)$ est un sommet de $\mathfrak{X}(K^2)$, alors l'ensemble des arêtes dont $[L]$ est un sommet est en bijection avec $\mathbb{P}^1(\kappa)$.*

Démonstration. Soit $([L], [L'])$ une arête. On peut supposer $L' \subset L$ et $L/L' \simeq \kappa$. Donc $L'/\varpi L$ est une κ -droite de $L/\varpi L \simeq \kappa^2$. Réciproquement, toute κ -droite de $L/\varpi L$ se relève en un réseau L' tel que $[L'] \neq [L]$ et $d([L], [L']) = 1$. Donc l'ensemble des arêtes autour de $[L]$ s'identifie aux droites de κ^2 , soit à $\mathbb{P}^1(\kappa)$. □

3.4 Action sur l'arbre de Bruhat-Tits

On dispose d'une action naturelle de $\mathrm{GL}_2(K)$ sur l'ensemble des réseaux par :

$$g \cdot (\mathcal{O}f_1 \oplus \mathcal{O}f_2) = \mathcal{O}g(f_1) \oplus \mathcal{O}g(f_2)$$

Par passage au quotient, on dispose donc d'une action de $\mathrm{GL}_2(K)$ sur l'arbre $\mathfrak{X}(K^2)$.

Comme le centre de $\mathrm{GL}_2(K)$ agit trivialement, on en déduit également des actions de $\mathrm{SL}_2(K)$ et $\mathrm{PGL}_2(K)$. Concentrons-nous sur $\mathrm{SL}_2(K)$.

3.14 Remarque. Si (e_1, e_2) désigne la base canonique de K^2 , on appelle **appartement standard** :

$$\mathbb{A}_0 := \mathbb{A}(e_1, e_2) = \{[\mathcal{O}e_1 \oplus \varpi^b \mathcal{O}e_2] \mid b \in \mathbb{Z}\}.$$

Pour $\alpha \in \mathcal{O}^\times$ et $a \in \mathbb{Z}$, on a alors l'action des matrices diagonales,

$$\begin{pmatrix} \alpha\varpi^a & 0 \\ 0 & \alpha^{-1}\varpi^{-a} \end{pmatrix} \cdot [\mathcal{O}e_1 \oplus \varpi^b \mathcal{O}e_2] = [\varpi^a \mathcal{O}e_1 \oplus \varpi^{b-a} \mathcal{O}e_2] = [\mathcal{O}e_1 \oplus \varpi^{b-2a} \mathcal{O}e_2]$$

ce qui dit que les matrices diagonales sont des translations de pas $-2a$ sur l'appartement standard.

De plus, l'élément $s_a := \begin{pmatrix} 0 & \varpi^{-a} \\ \varpi^a & 0 \end{pmatrix}$ agit comme la réflexion autour du sommet $[\mathcal{O}e_1 \oplus \varpi^a \mathcal{O}e_2]$ car

$$\begin{pmatrix} 0 & \varpi^{-a} \\ -\varpi^a & 0 \end{pmatrix} \cdot [\mathcal{O}e_1 \oplus \varpi^b \mathcal{O}e_2] = [\mathcal{O}\varpi^a e_2 \oplus \varpi^{b-a} \mathcal{O}e_1] = [\mathcal{O}e_1 \oplus \varpi^{2a-b} \mathcal{O}e_2]$$

et on reconnaît la réflexion affine $\begin{cases} \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 2a - n. \end{cases}$

On peut aussi montrer que les matrices unitriangulaires supérieures et inférieures agissent par pliages de l'appartement standard. En effet :

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha\varpi^a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot [\mathcal{O}e_1 \oplus \varpi^b \mathcal{O}e_2] = [\mathcal{O}(e_1 + \alpha\varpi^a e_2) \oplus \varpi^b \mathcal{O}e_2] \begin{cases} = [\mathcal{O}e_1 \oplus \varpi^b \mathcal{O}e_2] & \text{si } a \geq b, \\ \notin \mathbb{A}_0 & \text{si } a < b \end{cases}$$

3.15 Fait. $\mathrm{SL}_2(K)$ agit transitivement sur les paires (E, \mathbb{A}) où \mathbb{A} désigne un appartement et E désigne une arête de \mathbb{A} , mais n'agit pas transitivement sur les sommets de $\mathfrak{X}(K^2)$.

Démonstration. Soit \mathbb{A} un appartement qu'on écrit $\{\mathcal{O}f_1 \oplus \varpi^b \mathcal{O}f_2 \mid b \in \mathbb{Z}\}$ pour une K -base (f_1, f_2) de K^2 . On peut donc trouver $g \in \mathrm{SL}_2(K)$ qui envoie (f_1, f_2) sur la base canonique (e_1, e_2) à (f_1, f_2) car $\mathrm{SL}_2(K)$ agit transitivement sur les bases de K^2 . Or, vu l'action des matrices diagonales, se fait par les translations de pas $2\mathbb{Z}$, ce qui permet de se ramener à l'une des deux arêtes autour du sommet $v_0 = \mathcal{O}e_1 \oplus \mathcal{O}e_2$. Finalement, on peut se ramener à l'arête de notre choix via l'élément $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. \square

3.16 Remarque. On peut en fait montrer qu'il y a exactement deux orbites de sommets pour l'action de $\mathrm{SL}_2(K)$ sur $\mathfrak{X}(K^2)$.

3.17 Proposition. Le stabilisateur de $[\mathcal{O}e_1 \oplus \varpi^b \mathcal{O}e_2]$ est

$$\begin{pmatrix} \mathcal{O} & \varpi^{-b} \mathcal{O} \\ \varpi^b \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix} \cap \mathrm{SL}_2(K)$$

Démonstration. Soit $g \in \mathrm{SL}_2(K)$ fixant le sommet $v_0 = [\mathcal{O}e_1 \oplus \mathcal{O}e_2]$. Puisque $g(v_0) = v_0$, il existe $\delta \in K^\times$ tel que $(\mathcal{O}\delta g(e_1) \oplus \mathcal{O}\delta g(e_2)) = \mathcal{O}e_1 \oplus \mathcal{O}e_2$. Donc la matrice de passage de la K -base $(\delta g(e_1), \delta g(e_2))$ dans la base (e_1, e_2) est dans $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ et c'est aussi la matrice δg . Ainsi $g \in K^\times \cdot \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}) \cap \mathrm{SL}_2(K) = \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$.

Ensuite, on observe que pour l'action de $\mathrm{GL}_2(K)$ sur $\mathfrak{X}(K^2)$, on a

$$t_b := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi^b \end{pmatrix} \cdot v_0 = [\mathcal{O}e_1 \oplus \mathcal{O}\varpi^b e_2] =: v_b$$

D'où

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_2(K)}(v_b) = \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_2(K)}(g_b \cdot v_0) = g_b \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_2(K)}(v_0) g_b^{-1} = g_b K^\times \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}) g_b^{-1}$$

D'où le résultat en intersectant avec $\mathrm{SL}_2(K)$. □

4 Preuve du Thm de Nagao, Interprétation via les fibrés en droites et applications au Théorème de Grothendieck-Birkhoff (45min Claudio Bravo)

4.1 Arbres et amalgames. Preuve du Thm de Nagao

On pose les notations suivants : F es un corps et $\Gamma = \mathrm{GL}_2(F[t])$. Le corps $K = F(t)$ est minut d'une valuation discrète $\nu : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ définie par $\nu(a/b) = \deg(b) - \deg(a)$, pour $a, b \in F[t]$, $b \neq 0$. La completion de K respect de ν est le corps des séries formelles $F((1/t))$ et l'anneau des entiers \mathcal{O}_K est l'anneau des series de Laurent $F[[1/t]]$ dans la variable $\varpi = 1/t$.

4.1 Définition. Soit $V = K^2$ et $\{e_1, e_2\}$ sa base canonique. Soit Λ_n le réseau $\Lambda_n = \mathcal{O}_K e_1 t^n \oplus \mathcal{O}_K e_2$. Les classes des réseaux $\{[\Lambda_n] | n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ correspondents aux sommets $\{v_n | n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ d'un rayon R dans l'arbre de Bruhat-Tits X de $\mathrm{SL}_2(K)$.

$$\begin{array}{ccccccc} [\Lambda_0] & & [\Lambda_1] & & [\Lambda_2] & & \dots \\ \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \dots \end{array}$$

Rappelons que $\Gamma := \mathrm{GL}_2(F[t])$ agit sur l'arbre de Bruhat-Tits X par des automorphismes simpliciaux. Le lemme suivant permet d'obtenir des présentations de groupes à partir de telles actions. Pour une version plus générale, on pourra consulter [Ser03, Ch. I, § 5].

4.2 Théorème. [Ser03, Ch. I, § 5, Th. 5.4] Soit G un groupe agissant sur un arbre X de telle façon que :

- (1) le quotient $G \backslash X$ soit un arbre ;
- (2) de plus, $G \backslash X$ soit l'union de deux rayons R_1 et R_2 le long d'une arête e ;
- (3) si l'on écrit $V(R_i) = \{v_{i,j}\}_{j=0}^\infty$ (avec $v_{i,j}$ voisin de $v_{i,j+1}$), alors on a $\mathrm{Stab}_G(v_{i,j}) \subseteq \mathrm{Stab}_G(v_{i,j+1})$.

Alors $G \cong G_1 *_H G_2$, où $G_1 = \bigcup_{j=0}^\infty \mathrm{Stab}_G(v_{1,j})$, $G_2 = \bigcup_{j=0}^\infty \mathrm{Stab}_G(v_{2,j})$ et $H = \mathrm{Stab}_G(e)$.

Dans la suite, nous utiliserons le théorème précédent pour démontrer le Théorème de Nagao. En effet, soit $\Gamma_0 = \mathrm{GL}_2(F)$ et $\Gamma_n = B(F[t]_n)$ comme dans § 2.

4.3 Proposition. (a) On a $\Gamma \cdot v_n \cap \Gamma \cdot v_m = \emptyset$ si $n \neq m$.

(b) Γ_n est le stabilisateur de v_n dans Γ .

(c) Γ_0 opère transitivement sur l'ensemble des arêtes d'origine v_0 .

(d) Pour $n \geq 1$, Γ_n laisse fixe l'arête $e_n := v_n - v_{n+1}$ et opère transitivement sur l'ensemble des arêtes d'origine v_n distinctes de e_n .

Preuve. (a) Soit $s = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ un élément de Γ transformant $v_n = [\Lambda_n]$ en $v_m = [\Lambda_{n+m}]$. Par hypothèse, il existe un entier h tel que $s\Lambda_n = t^{-h}\Lambda_{n+m}$. Comme $\nu(\det(s)) = 0$, on a qui $m = 2h$. En écrivant que s applique Λ_n dans $t^{-h}\Lambda_{n+2h}$, on obtient les conditions :

$$\deg(a) \leq h, \quad \deg(b) \leq n + h, \quad \deg(c) \leq n - h, \quad \deg(d) \leq -h. \quad (4.1)$$

Les conditions portant sur a et d sont impossibles à réaliser simultanément si $h \neq 0$. Ça démontre (a)

(b) Admettons que $h = 0$. Pour $n = 0$, les quatre conditions dans (4.1) signifient que $a, b, c, d \in F$, donc $s \in \Gamma_0$. Pour $n \geq 1$, les conditions dans (4.1) signifient que $a, d \in F, c = 0$ et $\deg(b) \leq n$. Donc $s \in \Gamma_n$, d'où (b).

(c) L'assertion (c) résulte du fait que l'ensemble des arêtes d'origine $v_0 = [\Lambda_0]$ s'identifie à la droite projective $\mathbb{P}^1(F)$, et que $\Gamma_0 = \mathrm{GL}_2(F)$ opère transitivement sur $\mathbb{P}^1(F)$.

(d) L'inclusion $\Gamma_n \subset \Gamma_{n+1}$ montre que Γ_n laisse fixe l'arête $e_n = v_n - v_{n+1}$. D'un autre part, l'action de Γ_n sur le F -plain $\Lambda_n/t^{-1}\Lambda_n$ est donné par l'homomorphisme :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b_n \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad \text{où } b = b_0 + b_1t + \cdots + b_nt^n, b_i \in F.$$

Son image dans $\mathrm{GL}_2(F)$ est le sous-groupe des matrices triangulaire supérieures $B(F)$. Cette groupe opère sur $\mathbb{P}^1(F)$ en laissant fixe un point (correspondant à e_n) et en agissant transitivement sur les autres. D'où (d). \square

4.4 Corollaire. *Le rayon R est un domaine fondamental de $X \bmod \Gamma$.*

Preuve. Notons que, d'après la Prop. 4.3(d), toute arête issue de v_n , avec $n \geq 1$, est ramenée à R par l'action de $\Gamma_n \subseteq \Gamma$. Pour les arêtes partant de v_0 , l'action est transitive d'après la Prop. 4.3(c). Ainsi, toute arête de X est ramenée à R , d'où le fait que R contient un domaine fondamental. Il résulte ensuite de la Prop. 4.3(a) que R ne contient pas deux sommets différents (et aussi pas deux arêtes différents) dans la même Γ -orbite, ce qui démontre le résultat. \square

Preuve du Théorème de Nagao. Puisque l'arbre R est un domaine fondamental de $X \bmod \Gamma$, on peut utiliser le Théorème 4.2. Soit R_1 le rayon des sommets $\{v_i\}_{i=1}^\infty$ et $R_2 = \{v_0\}$. Alors R_1 (et R_2 évidemment) satisfait (3) dans Théo. 4.2. Note que $G_1 = \bigcup_{n=1}^\infty \Gamma_n = \bigcup_{n=1}^\infty B(F[t]_n) = B(F[t])$ par Prop. 4.3(b). Et en plus $G_2 = \mathrm{Stab}_\Gamma(v_0) = \Gamma_0 = \mathrm{GL}_2(F)$ et $H = \mathrm{Stab}_\Gamma(e_0) = \mathrm{GL}_2(F) \cap B(F[t]_1) = B(F)$. Alors Théo. 4.2 démontre que $G \cong \mathrm{GL}_2(F) *_{B(F)} B(F[t])$. \square

4.2 Interprétation via les fibrés en droites

Soit F un corps (commutatif) et C une courbe projective lisse géométriquement connexe sur F . Soit $K = F(C)$ le corps des fonctions associées. On choisit un point fermé P de C , et l'on pose $\nu = \nu_P$ la valuation associée, K_P la completion de K par rapport à ν et $\mathcal{O} = \mathcal{O}_P$ son anneau des entiers.

On pose $C^{\mathrm{aff}} = C \setminus \{P\}$; c'est une courbe affine ayant pour unique "point à l'infini" le point P . Son algèbre affine A est un anneau de Dedekind dont l'idaux premiers correspondent aux points de C distincts de P . On a $A^* = F^*$.

4.5 Exemple. Si $C = \mathbb{P}_F^1$ et $\deg(P) = 1$ alors $A \cong F[t]$.

On pose $V = K^2$, de sorte que $\text{GL}(V) = \text{GL}_2(K)$. Soit L un \mathcal{O} -réseau de $V = K^2$. À L , on associe :

a) le sommet x_L de l'arbre X défini par L . Rappelons que $x_L = x_{L'}$ si et seulement si il existe $\alpha \in K^*$ tel que $L' = \alpha L$.

b) le sous-faisceau cohérent E_L du faisceau constant V sur C caractérisé par les deux propriétés suivantes :

- (1) en tout point Q de C^{aff} , le localisé $(E_L)_Q$ de E_L est $(\mathcal{O}_Q)^2$.
- (2) le localisé $(E_L)_P$ de E_L en P est L .

L'existence et l'unicité d'un tel faisceau sont immédiates. Comme E_L est localement libre de rang 2, on peut l'interpréter comme un fibré vectoriel de rang 2 sur C : c'est l'identification habituelle d'un fibré vectoriel avec le faisceau de ses germes de sections. Sa fibre en P est $L/\pi L$, où π est une uniformisante de \mathcal{O} . Vu (1), on a :

- (i) La restriction de E_L à C^{aff} est un fibré trivial.

De plus :

- (ii) Si $\alpha \in K^*$, et si $n = v(\alpha)$, on a $E_{\alpha L} = I_P^{\otimes n} \otimes E_L$ où I_P est le faisceau d'idéaux du point P sur C , c'est à dire :

$$I_P = \{f \in K \mid \text{div}(f) + P \geq 0\},$$

où le diviseur $D \geq 0$ ssi D a des coefficients positifs.

- (iii) Si L' est un \mathcal{O} -réseau de V , les fibrés E_L et $E_{L'}$ sont isomorphes si et seulement si il existe $s \in \Gamma = \text{GL}_2(A)$ tel que $L' = sL$.

Disons que deux fibrés vectoriels E et E' sur C sont I_P -équivalents s'il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que E' soit isomorphe à $I_P^{\otimes n} \otimes E$. Les propriétés i), ii), iii) ci-dessus entraînent :

4.6 Proposition. *La correspondance $x_L \leftrightarrow L \mapsto E_L$ induit une bijection de $V(\Gamma \backslash X)$ sur l'ensemble des classes de I_P -équivalence des fibrés vectoriels de rang 2 sur C dont les restrictions à C^{aff} sont triviales.*

4.3 Applications au Théorème de Grothendieck-Birkhoff

En utilisant la Prop. 4.6, on peut démontrer le Théorème de Grothendieck-Birkhoff en rang 2. Une démonstration pour un rang arbitraire passe par la généralisation de ces résultats aux rangs supérieurs en termes d'immeubles de Bruhat-Tits (voir la section suivante).

4.7 Théorème. *Tout fibré vectoriel de dimension finie (dimension 2 pour §4.2) sur la droite projective \mathbb{P}^1 se décompose comme somme de fibrés vectoriels de dimension 1 (fibrés en droites).*

Idée de preuve pour $n = 2$: Il est possible de montrer que, à isomorphisme près, tout fibré vectoriel est équivalent à l'un des fibrés correspondant au rayon R . Tous les fibrés sur ce rayon sont clairement décomposables (dans la base canonique). \square

5 Généralisation à SL_n : Immeubles et le Théorème de Soulé (60min BL et CB)

Référence : Paul Garrett, Buildings and classical groups §19

5.1 Variété de drapeaux

Soit K corps et $n \in \mathbb{N}$. On appelle variété de drapeaux une suite croissante d'espaces vectoriels

$$W_1 \subseteq \cdots \subseteq W_n$$

(avec soit des inégalités strictes, soit exactement n ssev) On note $\text{Flag}(K^n)$ cet ensemble. C'est une K -variété projective.

On peut munir $\text{Flag}(K^n)$ d'une structure de complexe cellulaire comme suit :

- Sommets= K -ssev propres de K^n
- arêtes=aires $W_1 \subsetneq W_2$
- m -simplexe= $W_1 \subsetneq \cdots \subsetneq W_m$

Les n -simplexes de K^n sont aussi appelés les drapeaux complets.

5.1 Théorème. *Etant donnés deux drapeaux complets $W_1 \subsetneq \cdots \subsetneq W_n$ et $W'_1 \subsetneq \cdots \subsetneq W'_n$, on peut toujours trouver une base adaptée (e_1, \dots, e_n) de K^n simultanément à ces deux drapeaux, c'est-à-dire qu'il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que*

$$W_i = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i) \quad \text{et} \quad W'_i = \text{Vect}(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(i)})$$

Notation : $\mathbb{A}_{(f_1, \dots, f_n)}$ le sous-complexe des drapeaux adaptés à la K -base (f_1, \dots, f_n) , appelé appartement sphérique

Démonstration. Faire le sujet d'agreg MG2014 ou lire la preuve dans Garrett □

On a une action naturelle K -linéaire de K -groupes algébriques de $\text{GL}_n(K)$ (et donc aussi $\text{SL}_n(K)$ et $\text{PGL}_n(K)$ et leurs sous-groupes sur $\text{Flag}(K^n)$ via

$$g \cdot (W_1, \dots, W_n) = (g(W_1), \dots, g(W_n))$$

Si (e_1, \dots, e_n) base canonique et $W_i = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ drapeau standard, le stabilisateur de $W_1 \subsetneq \cdots \subsetneq W_n$ est

$$B(K) = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

En conséquence, on a une décomposition, dite de Bruhat :

$$\text{GL}_n(K) = B(K)WB(K)$$

où $W = N/T \simeq \mathfrak{S}_n a$ est le stabilisateur N de \mathbb{A}_0 (le sous-complexe des drapeaux adaptés à la base canonique) modulo son fixateur

$$T = \begin{pmatrix} * & & \\ & \ddots & \\ & & * \end{pmatrix}$$

5.2 Théorème. *On a les propriétés suivantes :*

(A0) *Tous les $\mathbb{A}_{(f_1, \dots, f_n)}$ sont isomorphes*

(A1) *Deux drapeaux sont toujours dans un même appartement*

(A2) *Pour toute paire d'appartements $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$, il existe un isomorphisme de complexes qui fixe $\mathbb{A}_1 \cap \mathbb{A}_2$*

On a une réalisation géométrique de $\text{Flag}(K^n)$ dont les appartements sont des pavages de la sphère. La variété de drapeaux est donc réalisable topologiquement comme un recollement de sphères de dimension $n - 1$ le long de sphères de dimension $n - 2$

5.2 L'immeuble affine de $SL_n(K)$

On a vu que pour $SL_2(\mathbb{F}[T])$ il était utile d'agir sur un arbre et que le voisinage d'un sommet est isomorphe à $\mathbb{P}^1(K) = \text{Flag}(K^2)$ dans cet arbre.

Pour $SL_n(K)$ on va construire un espace similaire à un arbre et on va prescrire les voisinages des sommets comme étant des variétés de drapeaux

On voit aussi que \mathfrak{S}_n agit simplement transitivement sur les drapeaux complets d'un appartement donné, essentiellement par définition. On dit que c'est un complexe de Coxeter sphérique associé au groupe de Coxeter \mathfrak{S}_n .

Pour $n = 2$, l'intersection de la sphère de dimension $n - 2$ est simplement une union de deux points, l'action du groupe avec l'action du groupe $\mathfrak{S}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donc on ne voit pas grand chose, mais on comprend que l'action de $SL_2(K)$ sur un appartement doit être celle du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathfrak{S}_2 \times \mathbb{Z}^{n-1}$ sur la droite graduée.

Par analogie, on va donc faire agir le groupe $\mathfrak{S}_n \times \mathbb{Z}^{n-1}$ sur un espace affine de dimension $n - 1$. Concrètement, on prend \mathbb{R}^{n-1} , on place un n -simplexe régulier dedans et on considère la structure de complexe sur \mathbb{R}^{n-1} induite par le groupe engendré par les n -faces de codimension 1 de ce simplexe. Notons Σ_{n-1} l'espace \mathbb{R}^{n-1} munit de cette structure de complexe simplicial et on l'appelle complexe de Coxeter affine associé au groupe de Coxeter $\mathfrak{S}_n \times \mathbb{Z}^{n-1}$, qui agit naturellement sur Σ en préservant la structure simpliciale.

5.3 Définition. On appelle immeuble de type A_n la donnée d'un complexe simplicial \mathfrak{X} et d'une famille de sous-complexes \mathcal{A} dont les éléments sont appelés "appartements" qui vérifie les axiomes :

- (A0) Tous les $\mathbb{A} \in \mathcal{A}$ sont isomorphes à Σ_{n-1}
- (A1) Deux simplexes maximaux (donc de dimension $n - 1$) sont contenus dans un même appartement
- (A2) Pour toute paire d'appartements $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$, il existe un isomorphisme de complexes qui fixe $\mathbb{A}_1 \cap \mathbb{A}_2$

C'est donc un recollement de copies d'espaces affines Σ_{n-1} le long d'hyperplans affines.

Terminologie : Dans Σ_{n-1} , on appelle :

- sommet=simplexe de dimension 0
- arêtes=simplexe de dimension 1
- chambre=simplexe de dimension n
- cloison=simplexe de codimension 1
- mur=hyperplan du pavage
- quartier=composante connexe de Σ_{n-1} privé des murs passant par un sommet

On peut réaliser les murs, qui sont des hyperplans affines comme les lieux des zéros d'une famille d'applications affines. Si on regarde les murs passant par un sommet, l'ensemble des fonctions affine forme un système de racines de type A_n .

Concrètement, pour Σ_{n-1} , en un sommet 0 du simplexe initial, les racines sont les

$$\alpha_{i,j}(x) = e_i^*(x) - e_j^*(x)$$

où $(e_k^*)_k$ est la base duale associée à la base canonique $(e_k)_k$.

5.3 Construction de l'immeuble avec les réseaux

5.4 Définition. On appelle réseau de K^n un \mathcal{O} -module de type fini qui contient une K -base de K^n . C'est en particulier un module libre de rang n .

On note $\mathcal{V}(K^n)$ l'ensemble des réseaux à homothétie près.

On dit que deux $[L], [M]$ sont voisins et on note $[L] \sim [M]$ si on peut choisir des représentants L, M de sorte que $M \subseteq L$ et $\mathfrak{m}L/M = 0$.

Cette relation est symétrie, réflexive, mais pas transitive. On définit un complexe cellulaire $\mathfrak{X}(K^n)$ par :

- 0-simplexes=sommets= $\mathcal{V}(K^n)$
- 1-simplexes=arêtes= $\{[L], [M]\}$ telles que $[L] \sim [M]$
- k -simplexes= $\{[L_1], \dots, [L_k]\}$ tels que $[L_i] \sim [L_j] \forall i \neq j$

Les appartements sont à nouveau les réseaux adaptés à une base donnée. Par exemple dans \mathbb{A}_0 , on a

$$\alpha_{i,j}(\mathfrak{m}^{a_1}e_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{m}^{a_n}e_n) = a_j - a_i$$

et

$$Q_0 = \bigcap_{j>i} \alpha_{i,j}^{-1}(\mathbb{R}_{>0}) = \{\mathfrak{m}^{a_1}e_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{m}^{a_n}e_n \mid a_1 < \dots < a_n\} \quad (5.1)$$

5.5 Lemme. Si $[M] \sim [L]$ alors pour tous représentants, on a $M \subseteq L$ ou $L \subseteq M$

Démonstration. Par définition de \sim , on peut choisir des représentant L', M' tels que

$$\mathfrak{m}M' \subset L' \subset M'$$

Ecrivons $M = \mathfrak{m}^k M'$ et $L = \mathfrak{m}^\ell L'$.

Si $k > \ell$, alors

$$M = \mathfrak{m}^k M' = \mathfrak{m}^{k-1} \mathfrak{m} M' \subset \mathfrak{m}^{k-1} L' \subset \mathfrak{m}^\ell L' = L$$

Si $k \leq \ell$, alors

$$L = \mathfrak{m}^\ell L' = \mathfrak{m}^\ell M' \subset \mathfrak{m}^k M' = M$$

□

5.6 Proposition. Si $[L_0], \dots, [L_{n-1}]$ est une chambre ($n-1$ -simplexe), alors à permutation près des termes on a une suite n -périodique d'inclusions de représentants

$$\dots \subset \underbrace{\mathfrak{m}L_{n-1}}_{=L_{-1}} \subset L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_{n-1} \subset \underbrace{\mathfrak{m}^{-1}L_0}_{=L_n} \subset \dots$$

5.7 Théorème. Le complexe ainsi construit est en fait un immeuble de type A_n .

Le groupe $\mathrm{SL}_n(K)$ agit transitivement sur les paires (C, \mathbb{A}) où C est une chambre contenue dans un appartement \mathbb{A} .

Une telle action est dite fortement transitive.

5.4 Généralisation de Nagao à SL_n : le théorème de Soulé

Rappelons que $\Gamma = \mathrm{SL}_n(F[t])$ agit sur l'immeuble de Bruhat-Tits X de SL_n sur $K = F((1/t))$ en tant que sous-groupe de $\mathrm{SL}_n(K)$. Un domaine fondamental pour cette action est fourni par le résultat suivant :

5.8 Théorème. [*Sou79, Th. 1*] *Le quartier Q_0 déf. dans (5.1) est un domaine fondamental pour l'action de Γ sur X . Autrement dit, pour chaque simplexe σ , il existe un unique simplexe $\sigma_0 \subset Q$ appartenant à la même Γ -orbite que σ .*

Pour décrire Γ comme un produit amalgamé des groupes plus simples, il faut étudier les Γ -stabilisateur des simplexes dans Q_0 .

En effet, soit v_0 la pointe de Q_0 et soit $x \in Q_0$ un point quelconque (possiblement un point intérieur d'un simplexe). Soit

Soit Δ l'ensemble des racines simples de SL_n . Pour tout sous-ensemble $I \subseteq \Delta$, on désigne par Γ_I le sous-groupe de Γ engendré par les éléments $\theta_\alpha(x_\alpha)$, où $x_\alpha \in F$ lorsque $\alpha \in I \cup -I$, $x_\alpha = 0$ lorsque $\alpha \in -(\Delta \setminus I)$, et $x_\alpha \in F[t]$ lorsque $\alpha \in (\Delta \setminus I)$.

5.9 Exemple. Supposons que $n = 3$. Alors $\Delta = \{\alpha, \beta\}$ et l'on dispose des sous-groupes suivants :

$$\Gamma_\Delta = \mathrm{SL}_n(F), \quad \Gamma_{\{\alpha\}} = \left(\begin{array}{ccc} F[t] & F[t] & F \\ F[t] & F[t] & F \\ 0 & 0 & F^* \end{array} \right)_{\det=1},$$

$$\Gamma_{\{\beta\}} = \left(\begin{array}{ccc} F^* & F & F \\ 0 & F[t] & F[t] \\ 0 & F[t] & F[t] \end{array} \right)_{\det=1}, \quad \Gamma_\emptyset = \left(\begin{array}{ccc} F^* & F[t] & F[t] \\ 0 & F^* & F[t] \\ 0 & 0 & F^* \end{array} \right)_{\det=1},$$

où l'on pose $G_{\det=1} := G \cap \mathrm{SL}_3(F(t))$ pour tout $G \subseteq \mathrm{GL}_n(F(t))$.

5.10 Théorème. [*Sou79, Th. 3*] *Le groupe $\Gamma = \mathrm{SL}_n(F[t])$ est le produit amalgamé des sous-groupes Γ_I , pour $I \subseteq \Delta$, le long de leurs intersections.*

5.11 Remarque. Des résultats plus généraux sont obtenus par Soulé [*Sou79*] dans le cadre des groupes de Chevalley, tels que SL_n , Sp_{2n} ou Spin_n . Ces résultats sont par ailleurs généralisés par Margaux dans [*Mar09*] au cas des F -groupes algébriques quelconques.

Références

- [Mar09] B. Margaux, The structure of the group $G(k[t])$: variations on a theme of Soulé., Algebra Number Theory **3** (2009), no. 4, 393–409 (English).
- [Ser03] J.-P. Serre, Trees. Transl. from the French by John Stillwell., corrected 2nd printing of the 1980 original ed., Springer Monogr. Math., Berlin : Springer, 2003 (English).
- [Sou79] C. Soulé, Chevalley groups over polynomial rings, Homological group theory, Proc. Symp., Durham 1977, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. 36, 359-367., 1979.