# Algèbre de Lie de double mélange et produit croisé

YADDADEN Khalef
(Université de Strasbourg)

GDR TLAG 2022 Dijon

16 mars 2022

1. Introduction
2. Formalisme Racinet de la théorie des doubles mélanges
3. Position du problème
4. Formulation en produit croisé
5. Algèbres de Lie stabilisateurs

# Introduction

## Définition

*Les polylogarithmes multiples aux racines de l'unité (abrégé MLV) sont des nombres complexes définis par la série*

$$L_{(i_1,\ldots,i_r)}(z_1,\ldots,z_r) := \sum_{0<m_1<\cdots<m_r} \frac{z_1^{i_1}\cdots z_r^{i_r}}{m_1^{i_1}\cdots m_r^{i_r}} \tag{1}$$

*où* $r, i_1,\ldots,i_r \in \mathbb{N}^*$ *et* $z_1,\ldots,z_r$ *dans* $\mu_N$ *le groupe des racines N-ièmes de l'unité.*

## Théorème ([Gon98])

*Les MLV possèdent une expression en termes d'intégrales itérées*

$$L_{(i_1,\ldots,i_r)}(z_1,\ldots,z_r)=\int_0^1 \Omega_0^{i_r-1}\Omega_{z_r}\Omega_0^{i_{r-1}-1}\Omega_{z_{r-1}z_r}\cdots\Omega_0^{i_1-1}\Omega_{z_1\cdots z_r} \tag{2}$$

*où* $\Omega_0 = \frac{dt}{t}$ *et* $\Omega_\zeta = \frac{dt}{\zeta^{-1}-t}, (\zeta \in \mu_N)$.

# Introduction

- Les expressions (1) et (2) permettent d'écrire de façons différentes un produit de MLV comme combinaisons linéaires sur $\mathbb{Q}$ d'autres MLV. On trouve ainsi des relations entre ces valeurs appelées *relations de double mélange* ([Rac]).

# Introduction

- Les expressions (1) et (2) permettent d'écrire de façons différentes un produit de MLV comme combinaisons linéaires sur $\mathbb{Q}$ d'autres MLV. On trouve ainsi des relations entre ces valeurs appelées *relations de double mélange* ([Rac]).

- Racinet exhibe et étudie un schéma affine associé à ces relations et montre qu'il possède une structure de torseur sous un schéma en groupe, spécialisation pour $G = \mu_N$ d'un schéma en groupe $\mathrm{DMR}_0^G$ associé à $G$ groupe abélien fini.

## Introduction

- Les expressions (1) et (2) permettent d'écrire de façons différentes un produit de MLV comme combinaisons linéaires sur $\mathbb{Q}$ d'autres MLV. On trouve ainsi des relations entre ces valeurs appelées *relations de double mélange* ([Rac]).

- Racinet exhibe et étudie un schéma affine associé à ces relations et montre qu'il possède une structure de torseur sous un schéma en groupe, spécialisation pour $G = \mu_N$ d'un schéma en groupe $\mathrm{DMR}_0^G$ associé à $G$ groupe abélien fini.

- Racinet utilise l'action tangente de l'algèbre de Lie $\mathfrak{dmr}_0^G$.

## Introduction

- Les expressions (1) et (2) permettent d'écrire de façons différentes un produit de MLV comme combinaisons linéaires sur $\mathbb{Q}$ d'autres MLV. On trouve ainsi des relations entre ces valeurs appelées *relations de double mélange* ([Rac]).

- Racinet exhibe et étudie un schéma affine associé à ces relations et montre qu'il possède une structure de torseur sous un schéma en groupe, spécialisation pour $G = \mu_N$ d'un schéma en groupe $\mathrm{DMR}_0^G$ associé à $G$ groupe abélien fini.

- Racinet utilise l'action tangente de l'algèbre de Lie $\mathfrak{dmr}_0^G$.

- $\mathfrak{dmr}_0^G$ est une algèbre de Lie graduée liée à l'algèbre de Lie motivique dont les dimensions composantes graduées ne sont pas connues.

# L'algèbre de Hopf $\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle$

- $\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle$ : algèbre libre de séries formelles non commutatives à variables dans $X = \{x_g | g \in G \sqcup \{0\}\}$.
- $\hat{\Delta} : \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle \to \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle^{\hat{\otimes}2}$ : coproduit d'algèbre de Hopf sur $\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle$ donné par $\hat{\Delta}(x_g) = x_g \otimes 1 + 1 \otimes x_g$ $(g \in G \sqcup \{0\})$.
- $t_g : \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle \to \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle$ $(g \in G)$ : automorphisme d'algèbres donné par $x_0 \mapsto x_0$ et $x_h \mapsto x_{gh}$ $(h \in G)$.

# L'algèbre de Hopf $\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$

$\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$ : algèbre libre de séries formelles non commutatives à variables dans $Y = \{y_{n,g} | (n,g) \in \mathbb{N}^* \times G\}$.

**Lemme**

*Il existe un unique coproduit d'algèbre de Hopf sur $\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$ noté $\hat{\Delta}_\star^{\mathrm{alg}} : \mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle \to \mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle^{\hat{\otimes}2}$ donné pour $(n,g) \in \mathbb{N}^* \times G$ par*

$$\hat{\Delta}_\star^{\mathrm{alg}}(y_{n,g}) = y_{n,g} \otimes 1 + 1 \otimes y_{n,g} + \sum_{\substack{k=1 \\ h \in G}}^{n-1} y_{k,h} \otimes y_{n-k,gh^{-1}} \tag{3}$$

*appelé coproduit harmonique.*

$\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$ est vue comme sous-algèbre $\mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{g \in G} \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_g$ de $\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle$

via $y_{n,g} \mapsto x_0^{n-1} x_g$.

## Coalgèbre-module $\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0$

$\pi_Y : \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle \to \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0$ : la surjection canonique.

### Lemme

- $\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0$ *est* $\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$*-module libre de rang* $1$.
- *Il existe un unique coproduit de coalgèbre* $\hat{\Delta}_\star^{\mathrm{mod}} : \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0 \to (\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0)^{\otimes 2}$ *tel que*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle \arrow[rr, "\hat{\Delta}_\star^{\mathrm{alg}}"] \arrow[d, "\pi_Y"'] & & \mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle^{\hat{\otimes} 2} \arrow[d, "\pi_Y^{\otimes 2}"] \\
\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0 \arrow[rr, "\hat{\Delta}_\star^{\mathrm{mod}}"] & & (\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0)^{\hat{\otimes} 2}
\end{tikzcd} \tag{4}$$

*commute.*

# L'algèbre de Lie $\widehat{\mathfrak{Lib}}(X)$

$\widehat{\mathfrak{Lib}}(X)$ : $\mathbb{Q}$-algèbre de Lie libre sur $X$

$$\widehat{\mathfrak{Lib}}(X) \simeq \{\psi \in \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle \,|\, \hat{\Delta}(\psi) = \psi \otimes 1 + 1 \otimes \psi\} \tag{5}$$

## Lemme

$\widehat{\mathfrak{Lib}}(X)$ *est munie du crochet de Lie*

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle := s_{\psi_1}(\psi_2) - s_{\psi_2}(\psi_1) \qquad (\psi_1, \psi_2 \in \widehat{\mathfrak{Lib}}(X)) \tag{6}$$

où pour $\psi \in \widehat{\mathfrak{Lib}}(X)$

- $s_\psi$ : endomorphisme $\mathbb{Q}$-linéaire de $\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle$ donné par
$$s_\psi := \ell_\psi + d_\psi \tag{7}$$
- $d_\psi$ : dérivation de $\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle$ donnée par
$$d_\psi(x_0) = 0, \qquad \text{et pour } g \in G,\ d_\psi(x_g) = [x_g, t_g(\psi)] \tag{8}$$

# L'algèbre de Lie $\mathfrak{dmr}_0^G$

Pour $\psi \in \widehat{\mathfrak{Lib}}(X)$, on pose

$$\psi_\star := \pi_Y \circ \mathbf{q}(-\gamma_\psi(x_1) + \psi) \in \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0 \tag{9}$$

où

- $\mathbf{q} : \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle \to \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle$ : automorphisme $\mathbb{Q}$-linéaire donné par

$$\mathbf{q}(x_0^{n_1-1}x_{g_1}x_0^{n_2-1}x_{g_2}\cdots x_0^{n_r-1}x_{g_r}x_0^{n_{r+1}-1}) = x_0^{n_1-1}x_{g_1}x_0^{n_2-1}x_{g_2g_1^{-1}}\cdots x_0^{n_r-1}x_{g_rg_{r-1}^{-1}}x_0^{n_{r+1}-1} \tag{10}$$

- $\gamma_\psi \in \mathbb{Q}[[x]]$ donné par

$$\gamma_\psi(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\psi | x_0^{n-1}x_1\right) x^n \tag{11}$$

# L'algèbre de Lie $\mathfrak{dmr}_0^G$

## Proposition-Définition ([Rac])

$\mathfrak{dmr}_0^G$ *est l'ensemble des* $\psi \in \widehat{\mathfrak{Lib}}(X)$ *tels que*

1. $(\psi|x_0) = (\psi|x_1) = 0$ ;
2. $\hat{\Delta}_\star^{\mathrm{mod}}(\psi_\star) = \psi_\star \otimes 1 + 1 \otimes \psi_\star$ ;
3. $\left(\psi_\star|x_0^{n-1}x_g\right) = (-1)^{n-1}\left(\psi_\star|x_0^{n-1}x_{g^{-1}}\right)$ *où* $(n,g) \in \mathbb{N}^* \times G$.

$(\mathfrak{dmr}_0^G, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *est une sous-algèbre de Lie de* $(\widehat{\mathfrak{Lib}}(X), \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

# Actions de $(\widehat{\mathfrak{Lib}}(X), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sur $\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0$

Soit $\psi \in \widehat{\mathfrak{Lib}}(X)$. On définit

$$ {}^{\gamma}s_{\psi} := \ell_{-\gamma_{\psi}(x_1)} + s_{\psi} = \ell_{-\gamma_{\psi}(x_1)+\psi} + d_{\psi} \tag{12} $$

Il existe un unique endomorphisme $\mathbb{Q}$-linéaire ${}^{\gamma}s_{\psi}^{Y}$ de $\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0$ tel que

$$ \begin{tikzcd} \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle \arrow[r, "{}^{\gamma}s_{\psi}"] \arrow[d, "\pi_Y\circ\mathbf{q}"'] & \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle \arrow[d, "\pi_Y\circ\mathbf{q}"] \\ \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0 \arrow[r, "{}^{\gamma}s_{\psi}^{Y}"'] & \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0 \end{tikzcd} \tag{13} $$

commute.

# Actions de $(\widehat{\mathfrak{Lib}}(X), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sur $\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0$

## Lemme

*L'algèbre de Lie $(\widehat{\mathfrak{Lib}}(X), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ agit par endormorphismes sur l'espace $\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0$ via*

$$\psi \mapsto {}^{\gamma}s_{\psi}^{Y} \tag{14}$$

## Corollaire

*L'algèbre de Lie $(\widehat{\mathfrak{Lib}}(X), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ agit sur l'espace $\mathrm{Mor}_{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0, (\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0)^{\hat{\otimes}2}\right)$ par*

$$\psi \cdot D := \left({}^{\gamma}s_{\psi}^{Y} \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes {}^{\gamma}s_{\psi}^{Y}\right) \circ D - D \circ {}^{\gamma}s_{\psi}^{Y} \tag{15}$$

# L'algèbre de Lie $\mathfrak{stab}(\hat{\Delta}_\star^{\mathrm{mod}})$

## Définition

$$\mathfrak{stab}(\hat{\Delta}_\star^{\mathrm{mod}}) := \tag{16}$$
$$\left\{\psi \in \widehat{\mathfrak{Lib}}(X) \,|\, ({}^\gamma s_\psi^Y \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes {}^\gamma s_\psi^Y) \circ \hat{\Delta}_\star^{\mathrm{mod}} = \hat{\Delta}_\star^{\mathrm{mod}} \circ {}^\gamma s_\psi^Y\right\}$$

## Proposition ([EF0])

$$\mathfrak{dmr}_0^G \subset \mathfrak{stab}(\hat{\Delta}_\star^{\mathrm{mod}}) \tag{17}$$

# Action de $(\widehat{\mathfrak{Lib}}(X), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sur $\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$ (cas $G = \{1\}$)

## Lemme

*Si $G = \{1\}$, alors l'algèbre de Lie $(\widehat{\mathfrak{Lib}}(X), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ agit par dérivations sur l'algèbre $\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$ via*

$$\psi \mapsto \mathrm{ad}_{-\gamma_\psi(x_1)+\psi} + d_\psi \tag{18}$$

## Corollaire

*Si $G = \{1\}$, alors l'algèbre de Lie $(\widehat{\mathfrak{Lib}}(X), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ agit sur l'espace $\mathrm{Mor}_{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle, \mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle^{\hat{\otimes}2}\right)$ par*

$$\begin{aligned} \psi \cdot D := &\\ &\left(\left(\mathrm{ad}_{-\gamma_\psi(x_1)+\psi} + d_\psi\right) \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \left(\mathrm{ad}_{-\gamma_\psi(x_1)+\psi} + d_\psi\right)\right) \circ D \\ &- D \circ \left(\mathrm{ad}_{-\gamma_\psi(x_1)+\psi} + d_\psi\right) \end{aligned} \tag{19}$$

# L'algèbre de Lie $\mathfrak{stab}(\hat{\Delta}_\star^{\mathrm{alg}})$ (cas $G = \{1\}$)

## Définition

$$\mathfrak{stab}(\hat{\Delta}_\star^{\mathrm{alg}}) := \Big\{ \psi \in \widehat{\mathfrak{Lib}}(X) \;\Big|\; \Big( \big(\mathrm{ad}_{-\gamma_\psi(x_1)+\psi} + d_\psi\big) \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \big(\mathrm{ad}_{-\gamma_\psi(x_1)+\psi} + d_\psi\big) \Big) \circ \hat{\Delta}_\star^{\mathrm{alg}} = \hat{\Delta}_\star^{\mathrm{alg}} \circ \big(\mathrm{ad}_{-\gamma_\psi(x_1)+\psi} + d_\psi\big) \Big\} \tag{20}$$

## Proposition ([EF2])

$$\mathfrak{stab}(\hat{\Delta}_\star^{\mathrm{mod}}) \subset \mathfrak{stab}(\hat{\Delta}_\star^{\mathrm{alg}}) \tag{21}$$

## Objectif

Généraliser cette inclusion à $G \neq \{1\}$.

## Analyse de la situation

### Définition

- $\mathbb{Q}\text{-alg} - \text{mod}$ *: catégorie des couples* $(W, M)$ *de resp.* $\mathbb{Q}$*-algèbre et* $\mathbb{Q}$*-espace tel que* $M$ *est un* $W$*-module.*
- $\mathbb{Q}\text{-HAMC}$ *: catégorie des couples* $(W, M)$ *de* $\mathbb{Q}\text{-alg} - \text{mod}$ *tels que*
  1. $W$ *est munie d'un coproduit* $\Delta^W$ *d'algèbre de Hopf.*
  2. $M$ *est muni d'un coproduit* $\Delta^M$ *de coalgèbre.*
  3. $\forall w \in W, \forall m \in M, \Delta^M(wm) = \Delta^W(w)\Delta^M(m)$.

## Analyse de la situation

- Pour $(M, \Delta^M)$ dans $\mathbb{Q}\text{-coalg}$
$\mathrm{Der}_{\mathbb{Q}\text{-coalg}}(M, \Delta^M) :=$
$$\left\{ end \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(M) \,|\, (end \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes end) \circ \Delta^M = \Delta^M \circ end \right\}$$

- Pour $(W, \Delta^W)$ dans $\mathbb{Q}\text{-Hopf}$
$\mathrm{Der}_{\mathbb{Q}\text{-Hopf}}(W, \Delta^W) :=$
$$\left\{ der \in \mathrm{Der}_{\mathbb{Q}\text{-alg}}(W) \,|\, (der \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes der) \circ \Delta^W = \Delta^W \circ der \right\}$$

## Analyse de la situation

- Pour $(W, M)$ dans $\mathbb{Q}\text{-alg} - \text{mod}$
$$\mathrm{Der}_{\mathbb{Q}\text{-alg}-\text{mod}}(W, M) := \big\{(der, end) \in \mathrm{Der}_{\mathbb{Q}\text{-alg}}(W) \times \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(M) \mid \forall (w, m) \in W \times M, end(wm) = w\, end(m) + der(w)m\big\}$$

- Pour $(W, \Delta^W), (M, \Delta^M)$ dans $\mathbb{Q}\text{-HAMC}$
$$\mathrm{Der}_{\mathbb{Q}\text{-HAMC}}((W, \Delta^W), (M, \Delta^M)) :=$$
$$\mathrm{Der}_{\mathbb{Q}\text{-alg}-\text{mod}}(W, M) \cap \Big(\mathrm{Der}_{\mathbb{Q}\text{-Hopf}}(W, \Delta^W) \times \mathrm{Der}_{\mathbb{Q}\text{-coalg}}(M, \Delta^M)\Big)$$

## Analyse de la situation

Soit $\big((W,\Delta^W),(M,\Delta^M)\big)$ dans $\mathbb{Q}$-HAMC.

### Proposition

*Soit $\mathfrak{L}$ une $\mathbb{Q}$-algèbre de Lie munie d'un morphisme $(\delta,e):\mathfrak{L}\to \mathrm{Der}_{\mathbb{Q}\text{-alg}-\mathrm{mod}}(W,M)$. Alors*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (\delta,e)^{-1}\left(\mathrm{Der}_{\mathbb{Q}\text{-HAMC}}((W,\Delta^W),(M,\Delta^M))\right) & \\ \mathfrak{stab}(\Delta^M)=e^{-1}(\mathrm{Der}_{\mathbb{Q}\text{-coalg}}(M,\Delta^M)) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] & & \delta^{-1}\left(\mathrm{Der}_{\mathbb{Q}\text{-Hopf}}(W,\Delta^W)\right)=\mathfrak{stab}(\Delta^W) \arrow[ul, phantom, sloped, "\subset"] \end{tikzcd} \tag{22}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{L} \arrow[d, "(\delta,e)"] & \\ \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(M) & \mathrm{Der}_{\mathbb{Q}\text{-alg}-\mathrm{mod}}(W,M) \arrow[l] \arrow[r] & \mathrm{Der}_{\mathbb{Q}\text{-alg}}(W) \\ \mathrm{Der}_{\mathbb{Q}\text{-coalg}}(M,\Delta^M) \arrow[u, hook] & \mathrm{Der}_{\mathbb{Q}\text{-HAMC}}((W,\Delta^W),(M,\Delta^M)) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u, hook] & \mathrm{Der}_{\mathbb{Q}\text{-Hopf}}(W,\Delta^W) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

## Analyse de la situation

### Proposition (suite)

*Si, de plus, $M$ est un $W$-module libre de rang $1$ alors*

$$e^{-1}\left(\mathrm{Der}_{\mathbb{Q}\text{-coalg}}(M,\Delta^M)\right) = (\delta,e)^{-1}\left(\mathrm{Der}_{\mathbb{Q}\text{-HAMC}}\left((W,\Delta^W),(M,\Delta^M)\right)\right) \tag{23}$$

*Ainsi*

$$\mathfrak{stab}(\Delta^M) \subset \mathfrak{stab}(\Delta^W) \tag{24}$$

## Exemple

Pour $G = \{1\}$, on a

- $((\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle, \hat{\Delta}_\star^{\mathrm{alg}}), (\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0, \hat{\Delta}_\star^{\mathrm{mod}}))$ dans $\mathbb{Q}$-HAMC
- $\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0$ est un $\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$-module libre de rang 1
- $(\delta, e) : \widehat{\mathfrak{Lib}}(X) \to \mathrm{Der}_{\mathbb{Q}\text{-alg}-\mathrm{mod}}(\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle, \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0)$, $\psi \mapsto (\mathrm{ad}_{-\gamma_\psi(x_1)+\psi} + d_\psi, {}^\gamma s_\psi^Y)$

Conséquence : $\mathfrak{stab}(\hat{\Delta}_\star^{\mathrm{mod}}) \subset \mathfrak{stab}(\hat{\Delta}_\star^{\mathrm{alg}})$

# Cas $G \neq \{1\}$

Si $G \neq \{1\}$, on a

- $((\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle, \hat{\Delta}_\star^{\mathrm{alg}}), (\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0, \hat{\Delta}_\star^{\mathrm{mod}}))$ dans $\mathbb{Q}\text{-HAMC}$
- $\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0$ est un $\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$-module libre de rang 1
- $e : \widehat{\mathfrak{Lib}}(X) \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0)$, $\psi \mapsto {}^{\gamma}s_\psi^Y$

**Problème**

Relever $e : \widehat{\mathfrak{Lib}}(X) \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0)$ en
$(\delta, e) : \widehat{\mathfrak{Lib}}(X) \to \mathrm{Der}_{\mathbb{Q}\text{-alg}-\mathrm{mod}}(\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle, \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0)$.

## Cas $G \neq \{1\}$

$\Lsh$ On cherche $\delta$ comme restriction d'une action de $\widehat{\mathfrak{Lib}}(X)$ sur une sur-algèbre de $\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$.

**Difficulté**

L'action $\psi \mapsto \mathrm{ad}_{-\gamma_\psi(x_1)+\psi} + d_\psi$ de $\widehat{\mathfrak{Lib}}(X)$ sur $\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle$ donne un couple $(\delta, e) : \widehat{\mathfrak{Lib}}(X) \to \mathrm{Der}_{\mathbb{Q}\text{-alg}-\mathrm{mod}}(\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle, \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0)$ mais les $\delta_\psi$ $(\psi \in \widehat{\mathfrak{Lib}}(X))$ ne se restreignent pas à $\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$.

On va donc considérer une autre sur-algèbre de $\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$.

# L'algèbre $\hat{\mathcal{V}}_G$

## Définition

- $\hat{\mathcal{V}}_G$ : $\mathbb{Q}$-*algèbre graduée complète de générateurs* $\{e_0, e_1\} \sqcup G$ *et relations :*
    1. $g \times h = gh$
    2. $1 = 1_G$
    3. $g \times e_0 = e_0 \times g$

# L'algèbre $\hat{\mathcal{V}}_G$

## Définition

- $\hat{\mathcal{V}}_G$ : $\mathbb{Q}$-*algèbre graduée complète de genérateurs* $\{e_0, e_1\} \sqcup G$ *et relations :*
  1. $g \times h = gh$
  2. $1 = 1_G$
  3. $g \times e_0 = e_0 \times g$
- $\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle \rtimes G$ : $\mathbb{Q}$-*algèbre* $\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle \otimes G$ *munie du produit croisé*

$$(a \otimes g) * (b \otimes h) = at_g(b) \otimes gh \tag{25}$$

*(*$a, b \in \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle$ *et* $g, h \in G$*).*

# L'algèbre $\hat{\mathcal{V}}_G$

## Définition

- $\hat{\mathcal{V}}_G$ : $\mathbb{Q}$-algèbre graduée complète de genérateurs $\{e_0, e_1\} \sqcup G$ et relations :
  1. $g \times h = gh$
  2. $1 = 1_G$
  3. $g \times e_0 = e_0 \times g$
- $\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle \rtimes G$ : $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle \otimes G$ munie du produit croisé

$$(a \otimes g) * (b \otimes h) = at_g(b) \otimes gh \tag{25}$$

$(a, b \in \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle$ et $g, h \in G)$.

## Proposition

*Il existe un unique isomorphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres $\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle \rtimes G \xrightarrow{\beta} \hat{\mathcal{V}}_G$ tel que $x_0 \otimes 1 \mapsto e_0$ ; $x_g \otimes 1 \mapsto -ge_1g^{-1}$ et $1 \otimes g \mapsto g$ $(g \in G)$.*

# L'algèbre de Hopf $\hat{\mathcal{W}}_G$

## Définition

$\hat{\mathcal{W}}_G := \mathbb{Q} \oplus \hat{\mathcal{V}}_G e_1$ *: $\mathbb{Q}$-sous-algèbre de $\hat{\mathcal{V}}_G$.*

## Proposition

- *La $\mathbb{Q}$-algèbre $\hat{\mathcal{W}}_G$ est librement engendrée par la famille*

$$Z = \{z_{n,g} := -e_0^{n-1} g e_1 \,|\, (n,g) \in \mathbb{N}^* \times G\} \tag{26}$$

# L'algèbre de Hopf $\hat{\mathcal{W}}_G$

## Définition

$\hat{\mathcal{W}}_G := \mathbb{Q} \oplus \hat{\mathcal{V}}_G e_1$ *: $\mathbb{Q}$-sous-algèbre de $\hat{\mathcal{V}}_G$.*

## Proposition

- *La $\mathbb{Q}$-algèbre $\hat{\mathcal{W}}_G$ est librement engendrée par la famille*

$$Z = \{z_{n,g} := -e_0^{n-1} g e_1 \,|\, (n,g) \in \mathbb{N}^* \times G\} \tag{26}$$

- *$\hat{\mathcal{W}}_G$ est munie d'une structure d'algèbre de Hopf avec coproduit $\hat{\Delta}_G^{\mathcal{W}} : \hat{\mathcal{W}}_G \to \hat{\mathcal{W}}_G^{\otimes 2}$ donné par*

$$\hat{\Delta}_G^{\mathcal{W}}(z_{n,g}) = z_{n,g} \otimes 1 + 1 \otimes z_{n,g} + \sum_{\substack{k=1 \\ h \in G}}^{n-1} z_{k,h} \otimes z_{n-k,gh^{-1}} \tag{27}$$

# L'algèbre de Hopf $\hat{\mathcal{W}}_G$

## Définition

$\hat{\mathcal{W}}_G := \mathbb{Q} \oplus \hat{\mathcal{V}}_G e_1$ *: $\mathbb{Q}$-sous-algèbre de $\hat{\mathcal{V}}_G$.*

## Proposition

- *La $\mathbb{Q}$-algèbre $\hat{\mathcal{W}}_G$ est librement engendrée par la famille*
$$Z = \{z_{n,g} := -e_0^{n-1} g e_1 \mid (n,g) \in \mathbb{N}^* \times G\} \tag{26}$$
- *$\hat{\mathcal{W}}_G$ est munie d'une structure d'algèbre de Hopf avec coproduit $\hat{\Delta}_G^{\mathcal{W}} : \hat{\mathcal{W}}_G \to \hat{\mathcal{W}}_G^{\otimes 2}$ donné par*
$$\hat{\Delta}_G^{\mathcal{W}}(z_{n,g}) = z_{n,g} \otimes 1 + 1 \otimes z_{n,g} + \sum_{\substack{k=1 \\ h \in G}}^{n-1} z_{k,h} \otimes z_{n-k,gh^{-1}} \tag{27}$$
- *Il existe un unique isomorphisme d'algèbres de Hopf $\varpi : \mathbb{Q}\langle\langle Y \rangle\rangle \to \hat{\mathcal{W}}_G$ donné par $y_{n,g} \longmapsto z_{n,g}, (n,g) \in \mathbb{N}^* \times G$.*

# Le quotient $\hat{\mathcal{M}}_G$

## Définition

$\hat{\mathcal{M}}_G := \hat{\mathcal{V}}_G \Big/ \Big(\hat{\mathcal{V}}_G e_0 + \sum_{g \in G} \hat{\mathcal{V}}_G (g-1)\Big)$. *C'est un* $\hat{\mathcal{W}}_G$*-module.*

# Le quotient $\hat{\mathcal{M}}_G$

## Définition

$\hat{\mathcal{M}}_G := \hat{\mathcal{V}}_G \Big/ \left(\hat{\mathcal{V}}_G e_0 + \sum_{g\in G} \hat{\mathcal{V}}_G(g-1)\right)$. *C'est un $\hat{\mathcal{W}}_G$-module.*

## Proposition

*Il existe un unique isomorphisme $\mathbb{Q}$-linéaire $\kappa : \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0 \to \hat{\mathcal{M}}_G$ déterminé par la commutativé de*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle \arrow[r, "\beta\circ(-\otimes 1)"] \arrow[d, "\pi_Y\circ\mathbf{q}"'] & \hat{\mathcal{V}}_G \arrow[d, "-\cdot 1_{\mathcal{M}}"] \\ \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0 \arrow[r, "\kappa"'] & \hat{\mathcal{M}}_G \end{tikzcd} \tag{28}$$

*où $-\cdot 1_{\mathcal{M}} : \hat{\mathcal{V}}_G \to \hat{\mathcal{M}}_G$ la surjection canonique.*

## Le quotient $\hat{\mathcal{M}}_G$

### Proposition

- $(\varpi, \kappa) : (\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle, \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0) \to (\hat{\mathcal{W}}_G, \hat{\mathcal{M}}_G)$ *est un isomorphisme dans* $\mathbb{Q}\text{-alg} - \text{mod}$.
- *En particulier,* $\hat{\mathcal{M}}_G$ *est un* $\hat{\mathcal{W}}_G$*-module libre de rang* $1$.

Provient du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle \arrow[r, "\varpi"] \arrow[d, "\pi_Y"'] & \hat{\mathcal{W}}_G \arrow[d, "-\cdot 1_{\mathcal{M}}"] \\ \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle\, x_0 \arrow[r, "\kappa"] & \hat{\mathcal{M}}_G \end{tikzcd} \tag{29}$$

# La coalgèbre $\hat{\mathcal{M}}_G$

## Proposition

- *$\hat{\mathcal{M}}_G$ est muni d'une structure de coalgèbre avec coproduit $\hat{\Delta}^{\mathcal{M}}_G : \hat{\mathcal{M}}_G \to (\hat{\mathcal{M}}_G)^{\hat{\otimes}2}$ donné par la commutativité du diagramme*

$$\begin{tikzcd} \hat{\mathcal{W}}_G \arrow[r, "\hat{\Delta}^{\mathcal{W}}_G"] \arrow[d, "-\cdot 1_{\mathcal{M}}"'] & \hat{\mathcal{W}}_G^{\hat{\otimes}2} \arrow[d, "-\cdot 1_{\mathcal{M}}^{\otimes 2}"] \\ \hat{\mathcal{M}}_G \arrow[r, "\hat{\Delta}^{\mathcal{M}}_G"'] & \hat{\mathcal{M}}_G^{\hat{\otimes}2} \end{tikzcd} \tag{30}$$

- $((\hat{\mathcal{W}}_G, \hat{\Delta}^{\mathcal{W}}_G), (\hat{\mathcal{M}}_G, \hat{\Delta}^{\mathcal{M}}_G))$ *appartient à* $\mathbb{Q}$-HAMC.

# La dérivation $\mathrm{der}_{\psi}^{\mathcal{V},(0)}$

## Lemme

*Soit* $\psi \in \widehat{\mathfrak{Lib}}(X)$. *Il existe une unique dérivation de* $\mathbb{Q}$*-algèbre* $\mathrm{der}_{\psi}^{\mathcal{V},(0)}$ *de* $\hat{\mathcal{V}}_G$ *telle que*

$$e_0 \mapsto 0; \quad e_1 \mapsto [e_1, \beta(\psi \otimes 1)]; \quad g \mapsto 0, (g \in G) \tag{31}$$

# L'endomorphisme ${}^{\gamma}\mathrm{end}_{\psi}^{\mathcal{M},(10)}$

Soit $\psi \in \widehat{\mathfrak{Lib}}(X)$. Soit l'endomorphisme de $\hat{\mathcal{V}}_G$

$$ {}^{\gamma}\mathrm{end}_{\psi}^{\mathcal{V},(10)} := \ell_{\beta((-\gamma_{\psi}(x_1)+\psi)\otimes 1)} + \mathrm{der}_{\psi}^{\mathcal{V},(0)} \tag{32} $$

## Lemme

*Il existe un unique endomorphisme* ${}^{\gamma}\mathrm{end}_{\psi}^{\mathcal{M},(10)}$ *de* $\hat{\mathcal{M}}_G$ *tel que*

$$\begin{tikzcd} \hat{\mathcal{V}}_G \arrow[r, "{}^{\gamma}\mathrm{end}_{\psi}^{\mathcal{V},(10)}"] \arrow[d, "-\cdot 1_{\mathcal{M}}"'] & \hat{\mathcal{V}}_G \arrow[d, "-\cdot 1_{\mathcal{M}}"] \\ \hat{\mathcal{M}}_G \arrow[r, "{}^{\gamma}\mathrm{end}_{\psi}^{\mathcal{M},(10)}"] & \hat{\mathcal{M}}_G \end{tikzcd} \tag{33}$$

*commute.*

# Action de l'algèbre de Lie $(\widehat{\mathfrak{Lib}}(X), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sur $\hat{\mathcal{M}}_G$

## Proposition

*L'algèbre de Lie* $(\widehat{\mathfrak{Lib}}(X), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *agit par endormorphismes sur l'espace* $\hat{\mathcal{M}}_G$ *via*

$$\psi \mapsto {}^{\gamma}\mathrm{end}_{\psi}^{\mathcal{M},(10)} \tag{34}$$

## Corollaire

$(\widehat{\mathfrak{Lib}}(X), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *agit sur l'espace* $\mathrm{Mor}_{\mathbb{Q}}\left(\hat{\mathcal{M}}_G, \hat{\mathcal{M}}_G^{\hat{\otimes}2}\right)$ *par*

$$\psi \cdot D := \left({}^{\gamma}\mathrm{end}_{\psi}^{\mathcal{M},(10)} \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes {}^{\gamma}\mathrm{end}_{\psi}^{\mathcal{M},(10)}\right) \circ D - D \circ {}^{\gamma}\mathrm{end}_{\psi}^{\mathcal{M},(10)} \tag{35}$$

# L'algèbre de Lie $\mathfrak{stab}(\hat{\Delta}_G^{\mathcal{M}})$

## Définition

$$\mathfrak{stab}(\hat{\Delta}_G^{\mathcal{M}}) := \left\{ \begin{array}{l} \psi \in \widehat{\mathfrak{Lib}}(X) \mid \\ \left({}^{\gamma}\mathrm{end}_{\psi}^{\mathcal{M},(10)} \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes {}^{\gamma}\mathrm{end}_{\psi}^{\mathcal{M},(10)}\right) \circ \hat{\Delta}_G^{\mathcal{M}} \\ = \hat{\Delta}_G^{\mathcal{M}} \circ {}^{\gamma}\mathrm{end}_{\psi}^{\mathcal{M},(10)} \end{array} \right\} \quad (36)$$

## Proposition

$$\mathfrak{stab}(\hat{\Delta}_G^{\mathcal{M}}) = \mathfrak{stab}(\hat{\Delta}_{\star}^{\mathrm{mod}}) \quad (37)$$

Provient de :

## Lemme

*L'action* $\psi \mapsto {}^{\gamma}\mathrm{end}_{\psi}^{\mathcal{M},(10)}$ *s'identifie à l'action* $\psi \mapsto {}^{\gamma}s_{\psi}^{Y}$ *via l'isomorphisme* $\kappa : \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0 \to \hat{\mathcal{M}}_G$.

# Démonstration

Soit $\psi \in \widehat{\mathfrak{Lib}}(X)$

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0 \arrow[rr, "\kappa"] \arrow[dd, "\gamma_{s_\psi^Y}"] & & \hat{\mathcal{M}}_G \arrow[dd, "\gamma_{\mathrm{end}_\psi^{\mathcal{M},(10)}}"] \\
\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle \arrow[ur, "\pi_Y \circ \mathbf{q}"] \arrow[rr, "\beta\circ(-\otimes 1)"] \arrow[dd, "\gamma_{s_\psi}"'] & & \hat{\mathcal{V}}_G \arrow[ur, "-\cdot 1_{\mathcal{M}}"] \arrow[dd, "\gamma_{\mathrm{end}_\psi^{\mathcal{V},(10)}}"] & \\
& \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle/\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle x_0 \arrow[rr, "\kappa"] & & \hat{\mathcal{M}}_G \\
\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle \arrow[ur, "\pi_Y \circ \mathbf{q}"] \arrow[rr, "\beta\circ(-\otimes 1)"'] & & \hat{\mathcal{V}}_G \arrow[ur, "-\cdot 1_{\mathcal{M}}"'] &
\end{tikzcd}$$

# La dérivation ${}^{\gamma}\mathrm{der}_{\psi}^{\mathcal{W},(1)}$

Soit $\psi \in \widehat{\mathfrak{Lib}}(X)$. Soit la dérivation de $\hat{\mathcal{V}}_G$

$$ {}^{\gamma}\mathrm{der}_{\psi}^{\mathcal{V},(1)} := \mathrm{ad}_{\beta((-\gamma_{\psi}(x_1)+\psi)\otimes 1)} + \mathrm{der}_{\psi}^{\mathcal{V},(0)} \tag{38} $$

## Lemme

*Il existe une unique dérivation* $\mathrm{der}_{\psi}^{\mathcal{W},(1)}$ *de* $\hat{\mathcal{W}}_G$ *telle que*

$$ \begin{tikzcd} \hat{\mathcal{W}}_G \arrow[r, "{}^{\gamma}\mathrm{der}_{\psi}^{\mathcal{W},(1)}"] \arrow[d, hook] & \hat{\mathcal{W}}_G \arrow[d, hook] \\ \hat{\mathcal{V}}_G \arrow[r, "{}^{\gamma}\mathrm{der}_{\psi}^{\mathcal{V},(1)}"] & \hat{\mathcal{V}}_G \end{tikzcd} \tag{39} $$

*commute.*

# L'algèbre de Lie $\mathfrak{stab}(\hat{\Delta}_G^{\mathcal{W}})$

## Corollaire

*$(\widehat{\mathfrak{Lib}}(X), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ agit sur l'espace $\mathrm{Mor}_{\mathbb{Q}}\left(\hat{\mathcal{W}}_G, \hat{\mathcal{W}}_G^{\hat{\otimes}2}\right)$ par*

$$\psi \cdot D := \left({}^{\gamma}\mathrm{der}_{\psi}^{\mathcal{W},(1)} \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes {}^{\gamma}\mathrm{der}_{\psi}^{\mathcal{W},(1)}\right) \circ D - D \circ {}^{\gamma}\mathrm{der}_{\psi}^{\mathcal{W},(1)} \quad (40)$$

## Définition

$$\mathfrak{stab}(\hat{\Delta}_G^{\mathcal{W}}) := \left\{ \begin{array}{l} \psi \in \widehat{\mathfrak{Lib}}(X) \mid \\ \left({}^{\gamma}\mathrm{der}_{\psi}^{\mathcal{W},(1)} \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes {}^{\gamma}\mathrm{der}_{\psi}^{\mathcal{W},(1)}\right) \circ \hat{\Delta}_G^{\mathcal{W}} \\ = \hat{\Delta}_G^{\mathcal{W}} \circ {}^{\gamma}\mathrm{der}_{\psi}^{\mathcal{W},(1)} \end{array} \right\} \quad (41)$$

## Inclusion de stabilisateurs

**Théorème**

$$\mathfrak{stab}(\hat{\Delta}_G^{\mathcal{M}}) \subset \mathfrak{stab}(\hat{\Delta}_G^{\mathcal{W}}) \tag{42}$$

- $\Big((\hat{\mathcal{W}}_G, \hat{\Delta}_G^{\mathcal{W}}), (\hat{\mathcal{M}}_G, \hat{\Delta}_G^{\mathcal{M}})\Big)$ dans $\mathbb{Q}\text{-HAMC}$
- $\hat{\mathcal{M}}_G$ est un $\hat{\mathcal{W}}_G$-module libre de rang 1
- $(\delta, e) : \widehat{\mathfrak{Lib}}(X) \to \mathrm{Der}_{\mathbb{Q}\text{-alg}-\mathrm{mod}}(\hat{\mathcal{W}}_G, \hat{\mathcal{M}}_G)$,
  $\psi \mapsto ({}^{\gamma}\mathrm{der}_{\psi}^{\mathcal{W},(1)}, {}^{\gamma}\mathrm{end}_{\psi}^{\mathcal{M},(10)})$ morphisme d'algèbres de Lie

Le résultat découle alors de la proposition en §3.

# Action de l'algèbre de Lie $(\widehat{\mathfrak{Lib}}(X), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sur $\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$

## Lemme

*Soit $\psi \in \widehat{\mathfrak{Lib}}(X)$. Il existe une unique dérivation ${}^{\gamma}d_{\psi}^{Y}$ de $\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$ telle que*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle \arrow[r, "{}^{\gamma}d_{\psi}^{Y}"] \arrow[d, "\varpi"'] & \mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle \arrow[d, "\varpi"] \\ \hat{\mathcal{W}}_G \arrow[r, "{}^{\gamma}\mathrm{der}_{\psi}^{\mathcal{W},(1)}"] & \hat{\mathcal{W}}_G \end{tikzcd} \tag{43}$$

*commute.*

## Lemme

*L'algèbre de Lie $(\widehat{\mathfrak{Lib}}(X), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ agit par dérivations sur l'espace $\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$ via*

$$\psi \mapsto {}^{\gamma}d_{\psi}^{Y} \tag{44}$$

# L'algèbre de Lie $\mathfrak{stab}(\hat{\Delta}_\star^{\mathrm{alg}})$

## Corollaire

$(\widehat{\mathfrak{Lib}}(X), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *agit sur l'espace* $\mathrm{Mor}_{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle, \mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle^{\hat{\otimes} 2}\right)$ *par*

$$\psi \cdot D := \left({}^\gamma d_\psi^Y \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes {}^\gamma d_\psi^Y\right) \circ D - D \circ {}^\gamma d_\psi^Y \tag{45}$$

## Définition

$$\mathfrak{stab}(\hat{\Delta}_\star^{\mathrm{alg}}) := \left\{ \begin{array}{l} \psi \in \widehat{\mathfrak{Lib}}(X) \mid \\ \left({}^\gamma d_\psi^Y \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes {}^\gamma d_\psi^Y\right) \circ \hat{\Delta}_\star^{\mathrm{alg}} = \hat{\Delta}_\star^{\mathrm{alg}} \circ {}^\gamma d_\psi^Y \end{array} \right\} \tag{46}$$

## Proposition

$$\mathfrak{stab}(\hat{\Delta}_\star^{\mathrm{alg}}) = \mathfrak{stab}(\hat{\Delta}_G^{\mathcal{W}}) \tag{47}$$

# Expression explicite de ${}^{\gamma}d_{\psi}^{Y}$

## Proposition

*Pour $(n,g) \in \mathbb{N}^* \times G$, on a*

$$ {}^{\gamma}d_{\psi}^{Y}(y_{n,g}) = \mathbf{q}_Y\Big(((-\gamma_\psi(x_1)+\psi)x_0^{n-1} - x_0^{n-1}t_g(-\gamma_\psi(x_1)+\psi))x_g\Big) \tag{48} $$

$\mathbf{q}_Y : \mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle \to \mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$ : automorphisme $\mathbb{Q}$-linéaire donné par

$$ \mathbf{q}_Y(y_{n_1,g_1}\cdots y_{n_r,g_r}) := y_{n_1,g_1}y_{n_2,g_2g_1^{-1}}\cdots y_{n_r,g_rg_{r-1}^{-1}} \tag{49} $$

## Remarque

Lorsque $G=\{1\}$, on a pour $\psi \in \widehat{\mathfrak{Lib}}(X)$,

$$ {}^{\gamma}d_{\psi}^{Y} = \mathrm{ad}_{-\gamma_\psi(x_1)+\psi} + d_\psi \tag{50} $$

[EF0] H. Furusho and B. Enriquez.
A stabilizer interpretation of double shuffle Lie algebras.
*International Mathematics Research Notices*, 2018(22) :6870 – 6907, 2018.

[EF1] H. Furusho and B. Enriquez.
The Betti side of the double shuffle theory. I. The harmonic coproducts.
*Selecta Mathematica*, 27(5) :1 – 106, 2021.

[EF2] H. Furusho and B. Enriquez.
The Betti side of the double shuffle theory. II. Double shuffle relations for associators.
arXiv preprint arXiv :1807.07786v4, 2021.

[EF3] H. Furusho and B. Enriquez.
The Betti side of the double shuffle theory. III. Bitorsor structures.
arXiv preprint arXiv :1908.00444v4, 2021.

[Gon98] A. B. Goncharov.
Multiple polylogarithms, cyclotomy and modular complexes.
*Mathematical Research Letters*, 5 :497 – 516, 1998.

[Rac] G. Racinet.
Doubles mélanges des polylogarithmes multiples aux racines de lunité.
*Publications mathématiques de l'IHÉS*, 95(1) :185 – 231, 2002.

[Yad] K Yaddaden.
Crossed product interpretation of the double shuffle lie algebra attached to a finite abelian group.
*arXiv preprint arXiv :2112.14140*, 2021.

Merci !