

Détermination explicite de graines pour la structure amassée associée aux variétés de Richardson Ouvertes

Colloque Tournant TLAG

Etienne MÉNARD

18 Mars 2022

Institut Fourier
Université Grenoble Alpes

Article : Cluster algebras associated with open Richardson varieties : an algorithm to compute initial seeds, arXiv :2201.10292

Algèbre amassée : Définition oo' par Fomin et Zelevinsky [FZ02]

Article : Cluster algebras associated with open Richardson varieties : an algorithm to compute initial seeds, arXiv :2201.10292

Algèbre amassée : Définition oo' par Fomin et Zelevinsky [FZo2]

Motivation initiale : étude de la base canonique duale de Lusztig sur les groupes quantiques dans l'idée de généraliser à d'autres types de structures.

Article : Cluster algebras associated with open Richardson varieties : an algorithm to compute initial seeds, arXiv :2201.10292

Algèbre amassée : Définition oo' par Fomin et Zelevinsky [FZo2]

Motivation initiale : étude de la base canonique duale de Lusztig sur les groupes quantiques dans l'idée de généraliser à d'autres types de structures.

Qu'est-ce qu'une algèbre amassée ? Un anneau unitaire intègre commutatif possédant une famille particulière de générateurs; les variables d'amas.

Et concrètement ? Comment on en calcule ? A-t-on des algorithmes ?

Quel est le rôle joué par la théorie de Lie dans ces algorithmes ?

Algèbres amassées

- Exemple prototypique

- Formalisation

- Algèbres amassées associées aux variétés de Richardson ouvertes

Catégorification additive

- Structure amassée sur $\text{mod}(\Lambda)$

- Structure amassée associée aux variétés de Richardson ouvertes

Δ -coordonnées et théorie de Lie

- Introduction aux Δ -coordonnées

- Lien avec la théorie des représentations des algèbres de Lie

Algèbres amassées

Algèbres amassées

Exemple prototypique

Définition

Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est dite *totale*ment (strictement) positive si tous ses mineurs sont strictement positifs.

Totale positivité sur les matrices

Définition

Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est dite *totalelement (strictement) positive* si tous ses mineurs sont strictement positifs.

Pour tester la totale positivité : calculer tous les mineurs ? Facile mais long et redondant.

Idée : utiliser des relations

Exemple : $M \in M_2(\mathbb{R})$. $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

5 mineurs : a, b, c, d, Δ . Pas besoin de calculer les 5 pour avoir la totale positivité

Comme $\Delta = ad - bc$, $a = \frac{\Delta + bc}{d}$ ou $d = \frac{\Delta + bc}{a}$, positivité totale avec 4 mineurs.

Totale positivité sur les matrices

Définition

Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est dite *totalelement (strictement) positive* si tous ses mineurs sont strictement positifs.

Pour tester la totale positivité : calculer tous les mineurs ? Facile mais long et redondant.

Idée : utiliser des relations

Exemple : $M \in M_2(\mathbb{R})$. $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

5 mineurs : a, b, c, d, Δ . Pas besoin de calculer les 5 pour avoir la totale positivité

Comme $\Delta = ad - bc$, $a = \frac{\Delta + bc}{d}$ ou $d = \frac{\Delta + bc}{a}$, positivité totale avec 4 mineurs.

Famille minimale pour positivité totale : **amas**, chacun des mineurs : **variable de l'amas**.

Ici deux amas : $\{a, b, c, \Delta\}$ et $\{b, c, d, \Delta\}$.

Deux amas diffèrent d'une variable, obtenue comme fraction rationnelle en les variables de l'autre amas et même plus : polynôme de Laurent

Algèbres amassées

Formalisation

Définition

Soit $m \geq n > 0$ et $\mathcal{F} = \mathbb{Q}(y_1, \dots, y_m)$. Une graine (de type géométrique) dans $\mathcal{F}$ est la paire $(\tilde{x}, \Gamma)$:

- un amas $\tilde{x} = \{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathcal{F}$ famille algébriquement libre qui engendre $\mathcal{F}$ où
 - $x_i, i \leq n$: variables d'amas
 - $x_i, i > n$: variables gelées
- carquois Γ : graphe orienté sans 2-cycles, sommets indexés par $\tilde{x}$, défini aux flèches entre sommets gelés près

Définition

Soit $m \geq n > 0$ et $\mathcal{F} = \mathbb{Q}(y_1, \dots, y_m)$. Une graine (de type géométrique) dans $\mathcal{F}$ est la paire $(\tilde{x}, \Gamma)$:

- un amas $\tilde{x} = \{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathcal{F}$ famille algébriquement libre qui engendre $\mathcal{F}$ où
 - $x_i, i \leq n$: variables d'amas
 - $x_i, i > n$: variables gelées
- carquois Γ : graphe orienté sans 2-cycles, sommets indexés par $\tilde{x}$, défini aux flèches entre sommets gelés près

Algèbre amassée : étude de l'ensemble des amas, comment les obtenir à partir d'une graine ? Opération de mutation :

Mutation d'amas

Mutation de $\tilde{x}$ dans la direction $1 \leq k \leq n : \mu_k : (\text{variables gelées non-mutable})$

$$\tilde{x} = \{x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m\} \mapsto \mu_k(\tilde{x}) = \{x_1, \dots, x_{k-1}, x_k^*, x_{k+1}, \dots, x_m\}$$

où

$$x_k^* = \frac{\prod_{b_{i,k} > 0} x_i^{b_{i,k}} + \prod_{b_{i,k} < 0} x_i^{-b_{i,k}}}{x_k}$$

où $b_{i_k} = \text{Card}\{i \mid (x_i \rightarrow x_k) \in \Gamma\} - \text{Card}\{i \mid (x_k \rightarrow x_i) \in \Gamma\}$

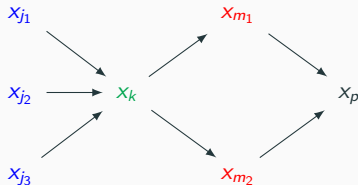
Mutation de graine

Mutation d'amas

Mutation de $\tilde{x}$ dans la direction $1 \leq k \leq n$:

$$x_k^* = \frac{\prod_{b_{i,k} > 0} x_i^{b_{i,k}} + \prod_{b_{i,k} < 0} x_i^{-b_{i,k}}}{x_k}$$

où $b_{i_k} = \text{Card}\{i \mid (x_i \rightarrow x_k) \in \Gamma\} - \text{Card}\{i \mid (x_k \rightarrow x_i) \in \Gamma\}$

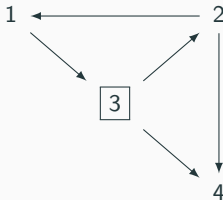


$$\text{On a } x_k^* = \frac{x_{j1} x_{j2} x_{j3} + x_{m1} x_{m2}}{x_k}$$

Mutation de carquois

On obtient $\mu_k(\Gamma)$ à partir de Γ par la suite d'opérations suivantes :

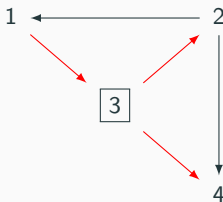
1. Pour chaque suite de flèches $i \rightarrow k \rightarrow j$ dans Γ , rajouter une flèche $i \rightarrow j$ dans $\mu_k(\Gamma)$
2. Inverser toutes les flèches adjacentes à x_k
3. Supprimer les 2-cycles éventuels



Mutation de carquois

On obtient $\mu_k(\Gamma)$ à partir de Γ par la suite d'opérations suivantes :

1. Pour chaque suite de flèches $i \rightarrow k \rightarrow j$ dans Γ , rajouter une flèche $i \rightarrow j$ dans $\mu_k(\Gamma)$
2. Inverser toutes les flèches adjacentes à x_k
3. Supprimer les 2-cycles éventuels

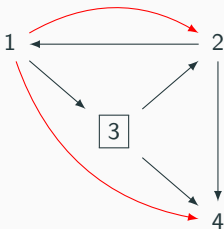


Mutation de graine

Mutation de carquois

On obtient $\mu_k(\Gamma)$ à partir de Γ par la suite d'opérations suivantes :

1. Pour chaque suite de flèches $i \rightarrow k \rightarrow j$ dans Γ , rajouter une flèche $i \rightarrow j$ dans $\mu_k(\Gamma)$
2. Inverser toutes les flèches adjacentes à x_k
3. Supprimer les 2-cycles éventuels

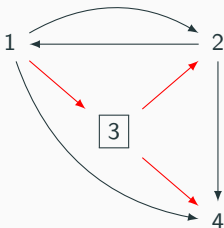


Mutation de graine

Mutation de carquois

On obtient $\mu_k(\Gamma)$ à partir de Γ par la suite d'opérations suivantes :

1. Pour chaque suite de flèches $i \rightarrow k \rightarrow j$ dans Γ , rajouter une flèche $i \rightarrow j$ dans $\mu_k(\Gamma)$
2. Inverser toutes les flèches adjacentes à x_k
3. Supprimer les 2-cycles éventuels

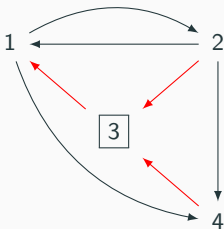


Mutation de graine

Mutation de carquois

On obtient $\mu_k(\Gamma)$ à partir de Γ par la suite d'opérations suivantes :

1. Pour chaque suite de flèches $i \rightarrow k \rightarrow j$ dans Γ , rajouter une flèche $i \rightarrow j$ dans $\mu_k(\Gamma)$
2. Inverser toutes les flèches adjacentes à x_k
3. Supprimer les 2-cycles éventuels

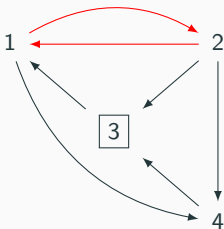


Mutation de graine

Mutation de carquois

On obtient $\mu_k(\Gamma)$ à partir de Γ par la suite d'opérations suivantes :

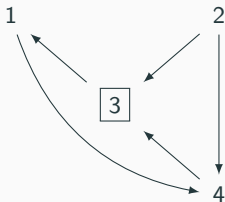
1. Pour chaque suite de flèches $i \rightarrow k \rightarrow j$ dans Γ , rajouter une flèche $i \rightarrow j$ dans $\mu_k(\Gamma)$
2. Inverser toutes les flèches adjacentes à x_k
3. Supprimer les 2-cycles éventuels



Mutation de carquois

On obtient $\mu_k(\Gamma)$ à partir de Γ par la suite d'opérations suivantes :

1. Pour chaque suite de flèches $i \rightarrow k \rightarrow j$ dans Γ , rajouter une flèche $i \rightarrow j$ dans $\mu_k(\Gamma)$
2. Inverser toutes les flèches adjacentes à x_k
3. Supprimer les 2-cycles éventuels



Exemple prototypique

On a deux graines :



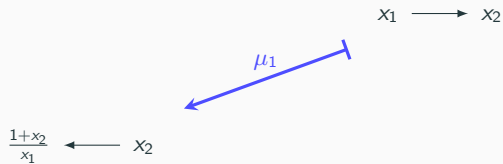
où

$$d = \frac{bc + \Delta}{a}, \quad a = \frac{bc + \Delta}{d}$$

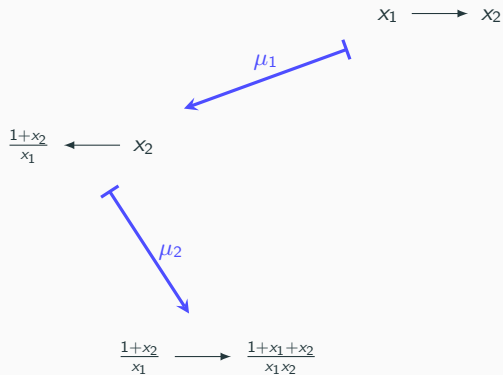
Autre exemple : A_2

$$x_1 \longrightarrow x_2$$

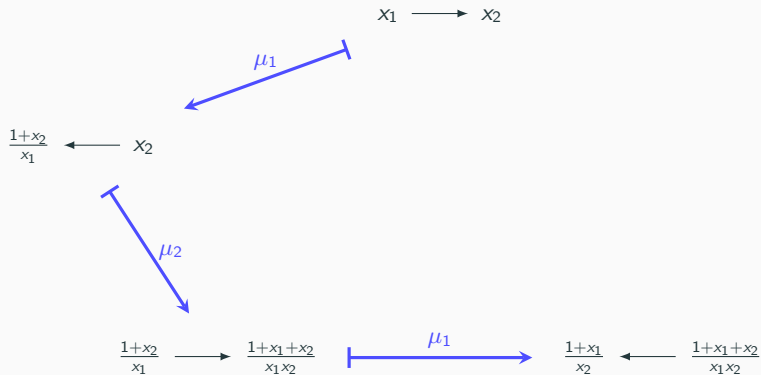
Autre exemple : A_2



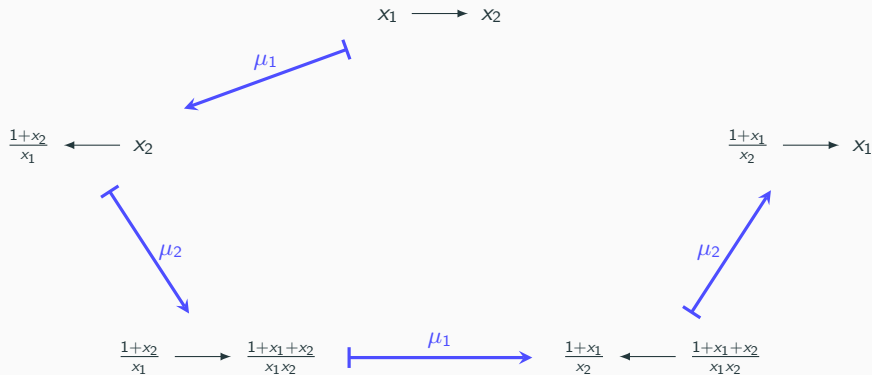
Autre exemple : A_2



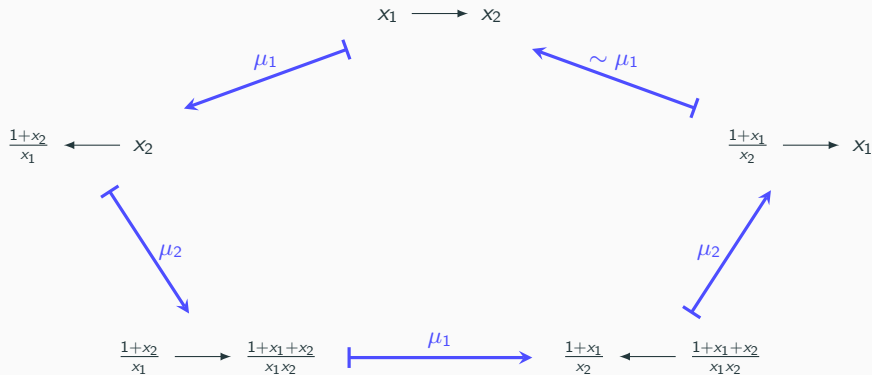
Autre exemple : A_2



Autre exemple : A_2



Autre exemple : A_2



Algèbre amassée

Étant donné une graine $(\tilde{x}, \Gamma)$ où $\mathbf{c}$ est l'ensemble des variables gelées, l'algèbre amassée associée à $(\tilde{x}, \Gamma)$ est la sous- $\mathbb{Z}[\mathbf{c}^{\pm 1}]$ -algèbre de $\mathcal{F}$ engendrée par l'ensemble des variable d'amas obtenus par mutation successives de $(\tilde{x}, \Gamma)$.

Algèbre amassée

Étant donné une graine $(\tilde{x}, \Gamma)$ où c est l'ensemble des variables gelées, l'algèbre amassée associée à $(\tilde{x}, \Gamma)$ est la sous- $\mathbb{Z}[c^{\pm 1}]$ -algèbre de $\mathcal{F}$ engendrée par l'ensemble des variable d'amas obtenus par mutation successives de $(\tilde{x}, \Gamma)$.

Exemple prototypique

L'algèbre amassée est la sous- $\mathbb{Z}[b^{\pm 1}, c^{\pm 1}, \Delta^{\pm 1}]$ -algèbre de $\mathbb{Q}(a, b, c, d, \Delta)$ engendrée par a et d .

Exemple A_2

L'algèbre amassée est la sous-algèbre de $\mathbb{Q}(x_1, x_2)$ engendrée par

$$\left\{ x_1, x_2, \frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1+x_1}{x_2}, \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} \right\}.$$

Algèbres amassées

**Algèbres amassées associées aux variétés
de Richardson ouvertes**

Définition

Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est dite *totale non-négative* si chacun de ses mineurs est positif ou nul.

Définition

Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est dite *totale non-négative* si chacun de ses mineurs est positif ou nul.

Dans [FZ99] étude des matrices inversibles totalement positives $GL_n(\mathbb{R})_{\geq 0}$ par les cellules de Bruhat doubles (cf après), dans [Lus94] étude de la totale non-négativité sur les groupes réductifs.

Définition

Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est dite *totale non-négative* si chacun de ses mineurs est positif ou nul.

Dans [FZ99] étude des matrices inversibles totalement positives $GL_n(\mathbb{R})_{\geq 0}$ par les cellules de Bruhat doubles (cf après), dans [Lus94] étude de la totale non-négativité sur les groupes réductifs.

En fait partie totalement non-négative = réunion des parties totalement positives de chacun des cellules de Bruhat double.

Si $G^{v,w}$ cellule de Bruhat double : $\mathbb{C}[G^{v,w}]$ possède une algèbre amassée. Amas = critère de positivité.

On va élargir cette question.

Question initiale : totale non-négativité sur $GL_n(\mathbb{R}) : GL_n(\mathbb{R})_{\geq 0}$

Question initiale : totale non-négativité sur $GL_n(\mathbb{R})$: $GL_n(\mathbb{R})_{\geq 0}$

Mais $GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ sous variété affine de $Gr(2n, n)$.

Espoir : comprendre $Gr(2n, n)_{\geq 0}$ de la même façon que $GL_n(\mathbb{R})_{\geq 0}$ par stratification.

Question initiale : totale non-négativité sur $GL_n(\mathbb{R})$: $GL_n(\mathbb{R})_{\geq 0}$

Mais $GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ sous variété affine de $Gr(2n, n)$.

Espoir : comprendre $Gr(2n, n)_{\geq 0}$ de la même façon que $GL_n(\mathbb{R})_{\geq 0}$ par stratification.

Aller plus loin : comprendre n'importe quelle variété de drapeaux

Approche utilisée : voir les variétés de drapeaux comme quotients de groupes algébriques

G est un $\mathbb{C}$ -groupe algébrique simple, simplement connexe, de type A , D ou E de diagramme de Dynkin associé Δ

Exemple

$$G = \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C}) \quad \Delta = 1 - 2 - \cdots - n-1 - n$$

Groupes algébriques

G est un $\mathbb{C}$ -groupe algébrique simple, simplement connexe, de type A , D ou E de diagramme de Dynkin associé Δ

H tore maximal, $B \supset H$, sous-groupe de Borel, B^- sous-groupe de Borel opposé, N radical unipotent maximal de B .

Exemple

$$G = \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C}) \quad \Delta = 1 - 2 - \cdots - n-1 - n$$

H matrices diagonales, B matrices triangulaires supérieures, B^- matrices triangulaires inférieures, N matrices unitriangulaires supérieures

Groupes algébriques

G est un $\mathbb{C}$ -groupe algébrique simple, simplement connexe, de type A, D ou E de diagramme de Dynkin associé Δ

H tore maximal, $B \supset H$, sous-groupe de Borel, B^- sous-groupe de Borel opposé, N radical unipotent maximal de B .

Variété de drapeau : $X = B^- \backslash G$

Groupe de Weyl de G : $W = \text{Norm}_G(H)/H$

Exemple

$G = \text{SL}_{n+1}(\mathbb{C}) \quad \Delta = 1 - 2 - \dots - n-1 - n$

H matrices diagonales, B matrices triangulaires supérieures, B^- matrices triangulaires inférieures, N matrices unitriangulaires supérieures

X variété de drapeau complets de type A_n

W groupe de Weyl de type A_n

$(\langle s_1, \dots, s_n \mid s_i^2 = e, s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, s_i s_j = s_j s_i \text{ si } |i - j| > 1 \rangle)$.

Comment trouver une stratification adaptée à l'étude de $X_{\geq 0}$? En faisant comme avec $GL_{n+1}(\mathbb{R})_{\geq 0}$ vu comme $G_{\geq 0}$.

Comment trouver une stratification adaptée à l'étude de $X_{\geq 0}$? En faisant comme avec $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})_{\geq 0}$ vu comme $G_{\geq 0}$.

G a deux décompositions :

- de Bruhat $G = \bigsqcup_{w \in W} B^- w B^-$
- de Birkhoff $G = \bigsqcup_{w \in W} B^- w B$

Comment trouver une stratification adaptée à l'étude de $X_{\geq 0}$? En faisant comme avec $GL_{n+1}(\mathbb{R})_{\geq 0}$ vu comme $G_{\geq 0}$.

G a deux décompositions :

- de Bruhat $G = \bigsqcup_{w \in W} B^- w B^-$
- de Birkhoff $G = \bigsqcup_{w \in W} B^- w B$

Quotient $\pi : G \rightarrow B^- \backslash G = X$

Image des décompositions :

- Décomposition en cellules de Schubert

$$G = \bigsqcup_{w \in W} C_w = \bigsqcup_{w \in W} \pi(B^- w B^-)$$

- Décomposition en cellules de Schubert opposées

$$G = \bigsqcup_{w \in W} C^w = \bigsqcup_{w \in W} \pi(B^- w B)$$

décomposition de X

Définition

On appelle variété de Richardson ouverte l'intersection

$$\mathcal{R}_{v,w} = C_w \cap C^v, \quad v, w \in W$$

On a $\mathcal{R}_{v,w} \neq \emptyset \Leftrightarrow v \leq w$ pour l'ordre de Bruhat.

Définition

On appelle variété de Richardson ouverte l'intersection

$$\mathcal{R}_{v,w} = C_w \cap C^v, \quad v, w \in W$$

On a $\mathcal{R}_{v,w} \neq \emptyset \Leftrightarrow v \leq w$ pour l'ordre de Bruhat.

Dans [FZ99], Fomin et Zelevinsky étudie $G_{\geq 0}$ via une structure d'algèbre amassée sur $\mathbb{C}[G^{v,w}]$ où $G^{v,w}$ cellule de Bruhat double ($= BvB \cap B^-wB^-$).

Pareil sur $\mathbb{C}[\mathcal{R}_{v,w}]$: mais comment définir une algèbre amassée ? Graine ? Mais comment l'obtenir ?

Catégorification additive

Principe

On va associer les éléments de l'algèbre amassée sur $\mathbb{C}[\mathcal{R}_{v,w}]$ à des éléments d'une catégorie sur laquelle on a une combinatoire équivalente à celle des algèbres amassées

Principe

On va associer les éléments de l'algèbre amassée sur $\mathbb{C}[\mathcal{R}_{v,w}]$ à des éléments d'une catégorie sur laquelle on a une combinatoire équivalente à celle des algèbres amassées

Quelle catégorie ?

Principe

On va associer les éléments de l'algèbre amassée sur $\mathbb{C}[\mathcal{R}_{v,w}]$ à des éléments d'une catégorie sur laquelle on a une combinatoire équivalente à celle des algèbres amassées

Quelle catégorie ?

Quelle structure amassée ?

Catégorification additive

Structure amassée sur $\text{mod}(\wedge)$

Δ : diagramme de Dynkin du groupe algébrique G et du groupe de Weyl W de type A_n, D_n ou E_n .

Δ : diagramme de Dynkin du groupe algébrique G et du groupe de Weyl W de type A_n, D_n ou E_n .

$Q = (Q_0, Q_1)$ carquois : orientation de Δ $Q_0 = \{1, \dots, n\}$: ensemble des sommets,
 Q_1 : ensemble des arêtes

Δ : diagramme de Dynkin du groupe algébrique G et du groupe de Weyl W de type A_n, D_n ou E_n .

$Q = (Q_0, Q_1)$ carquois : orientation de Δ $Q_0 = \{1, \dots, n\}$: ensemble des sommets,
 Q_1 : ensemble des arêtes

$\overline{Q}$: double carquois : pour chaque $\alpha \in Q_1$, α^* parallèle et de sens opposé.

Δ : diagramme de Dynkin du groupe algébrique G et du groupe de Weyl W de type A_n, D_n ou E_n .

$Q = (Q_0, Q_1)$ carquois : orientation de Δ $Q_0 = \{1, \dots, n\}$: ensemble des sommets,
 Q_1 : ensemble des arêtes

$\overline{Q}$: double carquois : pour chaque $\alpha \in Q_1$, α^* parallèle et de sens opposé.

$\mathbb{C}\overline{Q}$: algèbre des chemins sur $\overline{Q}$

c = un élément de $\mathbb{C}\overline{Q}$

$$c = \sum_{\alpha \in Q_1} \alpha \alpha^* - \alpha^* \alpha$$

Construction de Λ

Δ : diagramme de Dynkin du groupe algébrique G et du groupe de Weyl W de type A_n, D_n ou E_n .

$Q = (Q_0, Q_1)$ carquois : orientation de Δ $Q_0 = \{1, \dots, n\}$: ensemble des sommets,
 Q_1 : ensemble des arêtes

$\overline{Q}$: double carquois : pour chaque $\alpha \in Q_1$, α^* parallèle et de sens opposé.

$\mathbb{C}\overline{Q}$: algèbre des chemins sur $\overline{Q}$

c = un élément de $\mathbb{C}\overline{Q}$

$$c = \sum_{\alpha \in Q_1} \alpha \alpha^* - \alpha^* \alpha$$

Λ : quotient $\mathbb{Q}\overline{Q}/(c)$: algèbre préprojective, de dimension finie.

- $\text{mod}(\Lambda)$: catégorie des Λ -modules de dimension finie
- S_i : Λ -module simple de dimension 1 $\overset{1:1}{\longleftrightarrow} i \in Q_0$

- $\text{mod}(\Lambda)$: catégorie des Λ -modules de dimension finie
- S_i : Λ -module simple de dimension 1 $\overset{1:1}{\longleftrightarrow} i \in Q_0$

Catégories $\mathcal{C}_w$ et $\mathcal{C}^\vee$: sous-catégories pleines de $\text{mod}(\Lambda)$, fermées par extensions, fonctoriellement finies, « modèles catégoriques » de $\mathcal{C}_w$ et $\mathcal{C}^\vee$

- $\text{mod}(\Lambda)$: catégorie des Λ -modules de dimension finie
- S_i : Λ -module simple de dimension 1 $\overset{1:1}{\leftrightarrow} i \in Q_0$

Catégories $\mathcal{C}_w$ et $\mathcal{C}^\vee$: sous-catégories pleines de $\text{mod}(\Lambda)$, fermées par extensions, fonctoriellement finies, « modèles catégoriques » de $\mathcal{C}_w$ et $\mathcal{C}^\vee$

Si $v \leq w$ pour l'ordre de Bruhat :

$$\mathcal{C}_{v,w} = \mathcal{C}^\vee \cap \mathcal{C}_w$$

Modèle catégorique de $\mathcal{R}_{v,w}$

Analogie en théorie des catégories de l'algèbre amassée sur les espaces vectoriels [BIRS09] (Buan, Iyama, Reiten, Scott). Théorie plus générale que le cas particulier vu ici.

Analogie en théorie des catégories de l'algèbre amassée sur les espaces vectoriels [BIRS09] (Buan, Iyama, Reiten, Scott). Théorie plus générale que le cas particulier vu ici.

Graine de $\mathcal{C}$ [BIRS09, GLS11]

$\mathcal{C}$ sous-catégorie de $\text{mod}(\Lambda)$, fermée par extensions, fonctoriellement finie. V module $\mathcal{C}$ -rigide maximal basique, décomposition facteurs directs

indécomposables : $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$

Analogue en théorie des catégories de l'algèbre amassée sur les espaces vectoriels [BIRS09] (Buan, Iyama, Reiten, Scott). Théorie plus générale que le cas particulier vu ici.

Graine de $\mathcal{C}$ [BIRS09, GLS11]

$\mathcal{C}$ sous-catégorie de $\text{mod}(\Lambda)$, fermée par extensions, fonctoriellement finie. V module $\mathcal{C}$ -rigide maximal basique, décomposition facteurs directs

indécomposables : $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$

Graine associée à V :

- Amas $\tilde{x} = \{V_1, \dots, V_n\}$
 - Facteurs $\mathcal{C}$ -projectifs(-injectifs) : variables gelées
 - Autres facteurs : variables d'amas

Analogue en théorie des catégories de l'algèbre amassée sur les espaces vectoriels [BIRS09] (Buan, Iyama, Reiten, Scott). Théorie plus générale que le cas particulier vu ici.

Graine de $\mathcal{C}$ [BIRS09, GLS11]

$\mathcal{C}$ sous-catégorie de $\text{mod}(\Lambda)$, fermée par extensions, fonctoriellement finie. V module $\mathcal{C}$ -rigide maximal basique, décomposition facteurs directs

indécomposables : $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$

Graine associée à V :

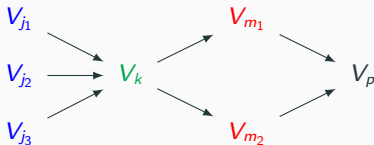
- Amas $\tilde{x} = \{V_1, \dots, V_n\}$
 - Facteurs $\mathcal{C}$ -projectifs(-injectifs) : variables gelées
 - Autres facteurs : variables d'amas
- Carquois : carquois Γ_V de l'algèbre $\text{End}_{\Lambda}(V)$

Mutation de graines de $\mathcal{C}$

- Mutation de carquois $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$: comme d'habitude
- Mutation de modules dans la direction k (V_k non-injectif-projectif) : à l'aide de suites exactes courtes selon l'entourage du sommet dans le carquois

$$0 \rightarrow V_k \rightarrow \bigoplus_{\substack{\alpha \in \Gamma_1 \\ s(\alpha)=k}} V_{t(\alpha)} \rightarrow V_k^*$$

$$0 \rightarrow V_k^* \rightarrow \bigoplus_{\substack{\alpha \in \Gamma_1 \\ t(\alpha)=k}} V_{s(\alpha)} \rightarrow V_k$$



Lien $\mathcal{C}_w \leftrightarrow C_w$ (et plus généralement $\text{mod}(\Lambda) \leftrightarrow \mathbb{C}[N]$) passe par le caractère d'amas : $\forall M \in \text{mod}(\Lambda), \varphi_M \in \mathbb{C}[N]$.

Catégorification additive

**Structure amassée associée aux variétés
de Richardson ouvertes**

Première étape : définir une structure amassée sur $\mathcal{C}_{v,w}$

Théorème [M. 2021]

Il existe un algorithme explicite permettant de donner une graine pour la structure amassée de $\mathcal{C}_{v,w}$ à partir d'un représentant réduit $\overline{w}$ de w et de l'élément $v \in W$

Structure amassée associée aux variétés de Richardson ouvertes

Première étape : définir une structure amassée sur $\mathcal{C}_{v,w}$

Théorème [M. 2021]

Il existe un algorithme explicite permettant de donner une graine pour la structure amassée de $\mathcal{C}_{v,w}$ à partir d'un représentant réduit $\overline{w}$ de w et de l'élément $v \in W$

Ensuite : prouver que l'image par φ d'une graine donne bien une graine de $\mathbb{C}[\mathcal{R}_{v,w}]$ (conjecture de Leclerc).

Etat : quasiment fini, travaux de Keller, encore une subtilité à lever.

Principe : partir d'une graine G pour $\mathcal{C}_w$ (cf après)

$$R_0 = V_{\overline{w}} = (R_{1,0}, R_{2,0}, R_{3,0}, R_{4,0}, R_{5,0}, R_{6,0})$$

⋮

⋅

⋅

Principe de l'algorithme

Principe : partir d'une graine G pour $\mathcal{C}_w$ (cf après) et faire une suite de mutations dictée par la combinatoire de $\bar{v}$ dans $\bar{w}$. Arriver à une graine $\mu_{\ell(v)} \circ \dots \circ \mu_1(G)$

$$R_0 = V_{\overline{w}} = (R_{1,0}, R_{2,0}, R_{3,0}, R_{4,0}, R_{5,0}, R_{6,0})$$

$\mu_{\ell(v)} \circ \dots \circ \mu_1$

$$R_{\ell(v)} = (R_{1,\ell(v)}, R_{2,\ell(v)}, R_{3,\ell(v)}, R_{4,\ell(v)}, R_{5,\ell(v)}, R_{6,\ell(v)})$$

Point de départ de notre algorithme : une graine de $\mathcal{C}_w$. Pas de moyen de toutes les décrire mais [GLS11] : description d'une famille de graines : données par les représentants $\overline{w}$.

Point de départ de notre algorithme : une graine de $\mathcal{C}_w$. Pas de moyen de toutes les décrire mais [GLS11] : description d'une famille de graines : données par les représentants $\overline{w}$.

Modules : détermination des facteurs directs comme sous-modules de modules projectifs indécomposables. Module $V : \oplus$ des facteurs directs

Point de départ de notre algorithme : une graine de $\mathcal{C}_w$. Pas de moyen de toutes les décrire mais [GLS11] : description d'une famille de graines : données par les représentants $\overline{w}$.

Modules : détermination des facteurs directs comme sous-modules de modules projectifs indécomposables. Module $V : \oplus$ des facteurs directs

Carquois : règle combinatoire pour connaître les flèches

Δ -coordonnées et théorie de Lie

Pour représenter de façon univoque des modules rigides de $\text{mod}(\Lambda)$: utilisation d'un vecteur d'entiers naturels.

Avantages : mutations deviennent de simples calculs d'entiers, l'appartenance à $\mathcal{C}_w$ ou $\mathcal{C}^\vee$ se voit simplement

Inconvénients : traduction $\text{mod}(\Lambda) \leftrightarrow \mathbb{N}^n$ non-triviale

Δ -coordonnées et théorie de Lie

Introduction aux Δ -coordonnées

Première définition

Dans la graine $V_{\overline{w}}$ on a des inclusions entre facteurs directs : $V_k \subset V_{k+}$. Permet de définir une nouvelle famille de modules : $M_k = V_{k+} / V_k$.

Chaque V_j peut-être représenté par sa décomposition en modules $(M_k)_k$. Vecteur de multiplicité : $\Delta_{\overline{w}}$ -vecteur.

Première définition

Dans la graine $V_{\overline{w}}$ on a des inclusions entre facteurs directs : $V_k \subset V_{k+}$. Permet de définir une nouvelle famille de modules : $M_k = V_{k+} / V_k$.

Chaque V_j peut-être représenté par sa décomposition en modules $(M_k)_k$. Vecteur de multiplicité : $\Delta_{\overline{w}}$ -vecteur.

Définition précise

Les modules standards de $\text{End}_{\Lambda}(V_{\overline{w}})$ sont les $\Delta_k = \text{Hom}(V_{\overline{w}}, M_k)$, $1 \leq k \leq \ell(w)$. Leurs vecteurs dimensions $\dim_{\text{End}_{\Lambda}(V_{\overline{w}})}(\Delta_k)$ forment une famille linéairement indépendante. [GLS11, Sections 10 & 12].

$\Delta_{\overline{w}}$ -vecteur de V_k : coordonnées de $\text{Hom}(V_{\overline{w}}, V_k)$ dans la base formée par les modules standards.

Définitions

Première définition

Dans la graine $V_{\overline{w}}$ on a des inclusions entre facteurs directs : $V_k \subset V_{k+}$. Permet de définir une nouvelle famille de modules : $M_k = V_{k+} / V_k$.

Chaque V_j peut-être représenté par sa décomposition en modules $(M_k)_k$. Vecteur de multiplicité : $\Delta_{\overline{w}}$ -vecteur.

Définition précise

Les modules standards de $\text{End}_{\Lambda}(V_{\overline{w}})$ sont les $\Delta_k = \text{Hom}(V_{\overline{w}}, M_k)$, $1 \leq k \leq \ell(w)$. Leurs vecteurs dimensions $\dim_{\text{End}_{\Lambda}(V_{\overline{w}})}(\Delta_k)$ forment une famille linéairement indépendante. [GLS11, Sections 10 & 12].

$\Delta_{\overline{w}}$ -vecteur de V_k : coordonnées de $\text{Hom}(V_{\overline{w}}, V_k)$ dans la base formée par les modules standards.

Propriétés

Tout module de $\mathcal{C}_w$ possède un $\Delta_{\overline{w}}$ -vecteur pour tout $\overline{w}$ représentant réduit de w . [GLS11, Lemme 10.2] Si deux modules rigides indécomposables ont le même $\Delta_{\overline{w}}$ -vecteur alors ils sont isomorphes. [GLS11, Corollaire 12.3]

Remarque : $\mathcal{C}_{w_0} = \text{mod}(\Lambda) = \mathcal{C}^{w_0} \cdot \dot{w} = [i_r, \dots, i_{\ell(w)+1}, \underbrace{i_{\ell(w)}, \dots, i_1}_{\bar{w}}]$ représentant réduit de w_0 . De même pour $\dot{v}$.

Remarque : $\mathcal{C}_{w_0} = \text{mod}(\Lambda) = \mathcal{C}^{w_0}$. $\dot{w} = [i_r, \dots, i_{\ell(w)+1}, \underbrace{i_{\ell(w)}, \dots, i_1}_{\bar{w}}]$ représentant réduit de w_0 . De même pour $\dot{v}$.

Critère d'appartenance [M.]

M rigide indécomposable

$$M \in \mathcal{C}_w \Leftrightarrow \Delta_{\dot{w}}(M) = [n_1, \dots, n_{\ell(w)}, 0, \dots, 0]$$

$$M \in \mathcal{C}^v \Leftrightarrow \Delta_{\dot{v}}(M) = [0, \dots, 0, n_{\ell(v)+1}, \dots, n_r]$$

Remarque : algorithme de détermination : algorithme glouton partant de $V_{\bar{w}} \in \mathcal{C}_w$ et supprimant les premières coordonnées des $\Delta_{\dot{v}}$ -vecteurs

Problème : détermination initiale

Critère d'appartenance : besoin d'un représentant de w_0 obtenu à partir de $\overline{w}$ et un à partir de $\overline{v}$.

Problème : détermination initiale

Critère d'appartenance : besoin d'un représentant de w_0 obtenu à partir de $\overline{w}$ et un à partir de $\overline{v}$.

Calcul de $\Delta_{\overline{w}}(V_{\overline{w}})$: facile, simple règle combinatoire (provient de la définition).

Calcul de $\Delta_{\dot{w}}(V_{\overline{w}})$: rajouter $r - \ell(w)$ zéros à droite.

Problème : détermination initiale

Critère d'appartenance : besoin d'un représentant de w_0 obtenu à partir de $\overline{w}$ et un à partir de $\overline{v}$.

Calcul de $\Delta_{\overline{w}}(V_{\overline{w}})$: facile, simple règle combinatoire (provient de la définition).

Calcul de $\Delta_{\dot{w}}(V_{\overline{w}})$: rajouter $r - \ell(w)$ zéros à droite.

Calcul de $\Delta_{\overline{v}}(V_{\overline{w}})$: n'a pas de sens.

Calcul de $\Delta_{\dot{v}}(V_{\overline{w}})$: on ne sait a priori pas faire.

Problème : détermination initiale

Critère d'appartenance : besoin d'un représentant de w_0 obtenu à partir de $\overline{w}$ et un à partir de $\overline{v}$.

Calcul de $\Delta_{\overline{w}}(V_{\overline{w}})$: facile, simple règle combinatoire (provient de la définition).

Calcul de $\Delta_{\dot{w}}(V_{\overline{w}})$: rajouter $r - \ell(w)$ zéros à droite.

Calcul de $\Delta_{\overline{v}}(V_{\overline{w}})$: n'a pas de sens.

Calcul de $\Delta_{\dot{v}}(V_{\overline{w}})$: on ne sait a priori pas faire.

Façon "simple" d'avoir le résultat : $\dot{v}$ et $\dot{w}$ deux représentants de w_0 : suite de mouvements de réécritures élémentaires $\dot{v} \rightsquigarrow \dot{w}$ [Mat64]. Si $\dot{w} \rightsquigarrow \dot{v}$ par un 2 ou 3-mouvement : formule pour exprimer $\Delta_{\dot{v}}$ en fonction de $\Delta_{\dot{w}}$ [BKT14, SSVZoo].

Ensuite : itération pas par pas

Avantage : tout le vecteur est calculé. Inconvénient : pas de formule close $\Rightarrow$ besoin d'une autre méthode.

Δ -coordonnées et théorie de Lie

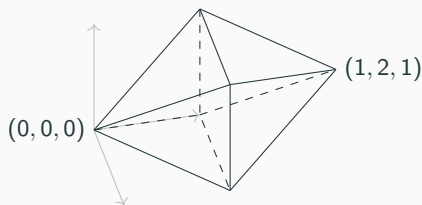
**Lien avec la théorie des représentations
des algèbres de Lie**

Polytope de Harder-Naramsimhan

L'enveloppe convexe des vecteurs dimensions de l'ensemble des sous-modules de $M \in \text{mod}(\Lambda)$ forme un polytope appelé polytope de Harder-Naramsimhan de M , noté $\text{Pol}(M)$.

Par exemple pour M de décomposition de socle $M = \begin{array}{c} 2 \\ 1 \quad 3 \\ 2 \end{array}$

Sous-module	0	2	$\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array}$	$\begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \\ 2 \end{array}$	$\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \searrow \quad \swarrow \\ 2 \end{array}$	$\begin{array}{c} 2 \\ 1 \quad 3 \\ 2 \end{array}$
Vecteur dimension	(0,0,0)	(0,1,0)	(1,1,0)	(0,1,1)	(1,1,1)	(1,2,1)



Donnée GGMS

$\mathfrak{g}$ algèbre de Lie semi-simple de type A,D ou E, de sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ et de groupe de Weyl associé W .

Une collection $\mu_{\bullet} = (\mu_w)_{w \in W}$ d'éléments de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ est dite de Gelfand-Goresky-MacPherson-Serganova si elle vérifie :

$$\mu_w - \mu_{s_i w} \in \mathbb{N}(w^{-1} \cdot h_i), \quad \forall w \in W, i \in I$$

Etant donné $\overline{w_0} = [i_r, \dots, i_1]$ réduit, et $w = s_{i_{k-1}} \dots s_{i_1}$, on définit l'entier $n_k^{\overline{w_0}}$ vérifiant

$$\mu_w - \mu_{s_{i_k} w} = n_k^{\overline{w_0}} (s_{i_1} \dots s_{i_{k-1}} h_{i_k})$$

Si on regarde le polytope formé par l'enveloppe convexe de $\mu_{\bullet}$ (pseudo-polytope de Weyl), c'est la longueur de l'arête entre les sommets w et $s_{i_k} w$.

Donnée de Mirković-Vilonen

Une donnée GGMS est dite de Mirković-Vilonen si elle vérifie de plus les conditions suivantes. Pour tout représentants réduits $\overline{w_{0,1}} = [i_r, \dots, i_1]$ et $\overline{w_{0,2}} = [j_r, \dots, j_1]$

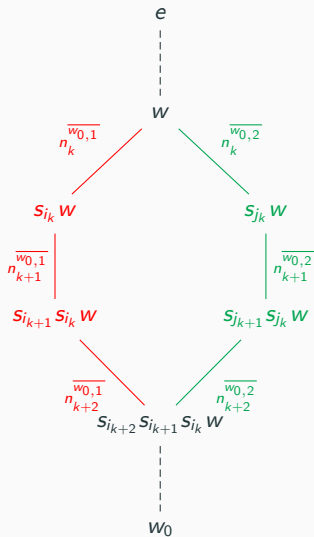
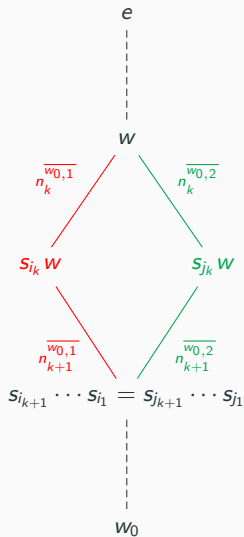
- si $\overline{w_{0,1}}$ et $\overline{w_{0,2}}$ diffèrent d'un 2-mouvement ($i_{k+1} = j_k$ et $i_k = j_{k+1}$) alors :

$$n_k^{\overline{w_{0,1}}} = n_{k+1}^{\overline{w_{0,2}}}, \quad n_{k+1}^{\overline{w_{0,1}}} = n_k^{\overline{w_{0,2}}}, \quad n_l^{\overline{w_{0,1}}} = n_l^{\overline{w_{0,2}}} \quad \forall l \notin \{k, k+1\}$$

- si $\overline{w_{0,1}}$ et $\overline{w_{0,2}}$ diffèrent d'un 3-mouvement ($i_{k+1} = j_k = j_{k+2}$ et $i_k = i_{k+2} = j_{k+1}$) alors :

$$n_k^{\overline{w_{0,1}}} = n_{k+1}^{\overline{w_{0,2}}} + n_{k+2}^{\overline{w_{0,2}}} - \min(n_k^{\overline{w_{0,2}}}, n_{k+2}^{\overline{w_{0,2}}}), \quad n_{k+2}^{\overline{w_{0,1}}} = n_k^{\overline{w_{0,2}}} + n_{k+1}^{\overline{w_{0,2}}} - \min(n_k^{\overline{w_{0,2}}}, n_{k+2}^{\overline{w_{0,2}}})$$

$$n_{k+1}^{\overline{w_{0,1}}} = \min(n_k^{\overline{w_{0,2}}}, n_{k+2}^{\overline{w_{0,2}}}), \quad n_l^{\overline{w_{0,1}}} = n_l^{\overline{w_{0,2}}} \quad \forall l \notin \{k, k+1, k+2\}$$



Le cristal $B(\infty)$

$B(\infty)$ est le cristal de $U_q^-(\mathfrak{g})$, partie négative de l'algèbre universelle enveloppante quantifiée.

Le cristal $B(\infty)$

$B(\infty)$ est le cristal de $U_q^-(\mathfrak{g})$, partie négative de l'algèbre universelle enveloppante quantifiée.

L'ensemble $\mathfrak{B}$

Soit $\Lambda(\nu)$ la variété nilpotente de Lusztig de vecteur dimension ν . On note $\mathfrak{B}(\nu)$ l'ensemble des composantes irréductibles de $\Lambda(\nu)$ et

$$\mathfrak{B} := \bigsqcup_{\nu \in \mathbb{N}Q_0} \mathfrak{B}(\nu)$$

On a identification entre les isoclasses de modules rigides de $\text{mod}(\Lambda)$ et les éléments de $\mathfrak{B}$. [GLS11, Corollaire 2.2]

Des modules aux cristaux [KS97, Lus90]

$\mathfrak{B}$ a une structure de cristal et il existe un isomorphisme de cristaux :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} B(\infty) & \rightarrow & \mathfrak{B} \\ b & \mapsto & \Lambda_b \end{array}$$

Des modules aux cristaux [KS97, Lus90]

$\mathfrak{B}$ a une structure de cristal et il existe un isomorphisme de cristaux :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} B(\infty) & \rightarrow & \mathfrak{B} \\ b & \mapsto & \Lambda_b \end{array}$$

Des cristaux aux polytopes de Mirković-Vilonen [BKT14]

L'application $\text{Pol} : \begin{array}{ccc} \text{mod}(\Lambda) & \rightarrow & \text{HN} \\ M & \mapsto & \text{Pol}(M) \end{array}$ prend une valeur générique sur chaque élément $T \in \mathfrak{B}$ conduisant à définir pour tout $b \in B(\infty)$ une application $\Psi : B(\infty) \mapsto \text{MV}(\infty)$ telle que si $\Phi(b) = T$, $\Psi(b) = \text{Pol}(X)$ où $X \in T$. Cela donne l'isomorphisme de cristal $\Psi \circ \Phi^{-1} : \mathfrak{B} \rightarrow \text{MV}(\infty)$.

Lien module indécomposable $\leftrightarrow$ polytope de Mirković-Vilonen

$L(\lambda)$ représentation irréductible de $\mathfrak{g}$, base cristalline $B(\lambda) \subset B(\infty)$.

Vecteurs de points extrémaux de $L(\lambda)$: éléments de l'orbite $W \cdot \lambda$.

À (λ, w) , Naito-Sagaki [NS09, Theorem 4.15] associent un polytope MV. À la même donnée, Geiss, Leclerc, Schröer [GLS11, Proposition 9.1] associent le vecteur V_k .

En combinant les deux : les Δ -vecteurs de V_k sont donnés par les longueurs des arêtes du polytope MV associé.

Lien module indécomposable $\leftrightarrow$ polytope de Mirković-Vilonen

$L(\lambda)$ représentation irréductible de $\mathfrak{g}$, base cristalline $B(\lambda) \subset B(\infty)$.

Vecteurs de points extrémaux de $L(\lambda)$: éléments de l'orbite $W \cdot \lambda$.

À (λ, w) , Naito-Sagaki [NS09, Theorem 4.15] associent un polytope MV. À la même donnée, Geiss, Leclerc, Schröer [GLS11, Proposition 9.1] associent le vecteur V_k .

En combinant les deux : les Δ -vecteurs de V_k sont donnés par les longueurs des arêtes du polytope MV associé.

Caractérisation obtenue

Pour tout représentant $\dot{v} \neq \dot{w}$, on peut déterminer les $\ell(v)$ premières coordonnées de $\Delta_{\dot{v}}(V_{\dot{w},k})$ à partir de la combinatoire de $\bar{v}$ dans $\bar{w}$.

Utilité pour l'algorithme

Donne la donnée de départ pour appliquer l'algorithme glouton

La formulation générale des $\ell(v)$ premières coordonnées des modules au cours de l'algorithme est une généralisation de leur description initiale.

Description initiale :

$$f_{\min}(k) \leq j \leq f(k)$$

Description générale :

$$f_{\min}(k)^{\alpha(k,m)\oplus} \leq j \leq f(k^{\alpha(k,m)+})$$

Questions

- [BIRS09] Aslak Bakke Buan, Osamu Iyama, Idun Reiten, and Jeanne Scott. **Cluster structures for 2-Calabi-Yau categories and unipotent groups.**
Compositio Mathematica, 145(4) :1035–1079, July 2009.
- [BKT14] Pierre Baumann, Joel Kamnitzer, and Peter Tingley. **Affine Mirković-Vilonen polytopes.**
Publications mathématiques de l’IHÉS, 120(1) :113–205, November 2014.
- [FZ99] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. **Double Bruhat cells and total positivity.**
Journal of the American Mathematical Society, 12(2) :335–380, 1999.
- [FZ02] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. **Cluster algebras I : Foundations.**
Journal of the American Mathematical Society, 15(2) :497–529, 2002.
- [GLS11] Christof Geiss, Bernard Leclerc, and Jan Schröer. **Kac-Moody groups and cluster algebras.**
Advances in Mathematics, 228(1) :329–433, September 2011.

- [KS97] Masaki Kashiwara and Yoshihisa Saito. **Geometric construction of crystal bases.**
Duke Mathematical Journal, 89(1) :9–36, July 1997.
- [Lus90] G. Lusztig. **Canonical Bases Arising from Quantized Enveloping Algebras. II.**
Progress of Theoretical Physics Supplement, 102 :175–201, March 1990.
- [Lus94] George Lusztig. **Total Positivity in Reductive Groups.**
In Jean-Luc Brylinski, Ranee Brylinski, Victor Guillemin, and Victor Kac, editors, *Lie Theory and Geometry : In Honor of Bertram Kostant*, Progress in Mathematics, pages 531–568. Birkhäuser, Boston, MA, 1994.
- [Mat64] Hideya Matsumoto. **Générateurs et relations des groupes de Weyl généralisés.**
Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, 258(13) :3419, 1964.

- [NS09] Satoshi Naito and Daisuke Sagaki. **Mirković–Vilonen polytopes lying in a Demazure crystal and an opposite Demazure crystal.**
Advances in Mathematics, 221(6) :1804–1842, August 2009.
- [SSVZoo] Boris Shapiro, Michael Shapiro, Alek Vainshtein, and Andrei Zelevinsky. **Simply laced Coxeter groups and groups generated by symplectic transvections.**
The Michigan Mathematical Journal, 48(1) :531–551, 2000.

Un petit exemple.