Extensions d'algèbres de Cherednik et foncteurs KZ généralisés.

Henry Fallet[1]

[1]Laboratoire amiénois de mathématiques fondamentale et appliquée
UFR des sciences
Université de Picardie Jules-Verne

Colloque tournant .
G.D.R TLag.

Introduction

Algèbres de Hecke.

1. k : un corps fini.

Introduction

Algèbres de Hecke.

1. k : un corps fini.
2. $G(k)$: un groupe de Chevalley

Introduction

Algèbres de Hecke.

1. k : un corps fini.
2. $G(k)$: un groupe de Chevalley
3. $B(k)$: un sous groupe de Borel de $G(k)$.

Introduction

Algèbres de Hecke.

1. k : un corps fini.
2. $G(k)$: un groupe de Chevalley
3. $B(k)$: un sous groupe de Borel de $G(k)$.
4. T : tore maximal.

Introduction

Algèbres de Hecke.

1. k : un corps fini.
2. $G(k)$: un groupe de Chevalley
3. $B(k)$: un sous groupe de Borel de $G(k)$.
4. T : tore maximal.
5. (W, S) : groupe de Weyl.

Introduction

Algèbres de Hecke.

1. k : un corps fini.
2. $G(k)$: un groupe de Chevalley
3. $B(k)$: un sous groupe de Borel de $G(k)$.
4. T : tore maximal.
5. (W, S) : groupe de Weyl.
6. R anneau commutatif.

Introduction

Algèbres de Hecke.

1. k : un corps fini.
2. $G(k)$: un groupe de Chevalley
3. $B(k)$: un sous groupe de Borel de $G(k)$.
4. T : tore maximal.
5. (W, S) : groupe de Weyl.
6. R anneau commutatif.
7. $H(G(k)) = R[B(k) \backslash G(k)/B(k)]$, muni d'un produit de convolution $*$ des fonctions .

1. Exemple :$q = p^n,\ k = \mathbb{F}_q,\ G(k) = GL_n(\mathbb{F}_q)$.

1. Exemple : $q = p^n,\ k = \mathbb{F}_q,\ G(k) = GL_n(\mathbb{F}_q)$.
   $B(k) = \{$ matrices triangulaires supérieures inversibles $\}$

1. Exemple :$q = p^n,\ k = \mathbb{F}_q,\ G(k) = GL_n(\mathbb{F}_q)$.
   $B(k) = \{$ matrices triangulaires supérieures inversibles $\}$
2. $H_n(q) := \{\Phi : GL_n(\mathbb{F}_q) \to R | \, \forall\, g \in GL_n(\mathbb{F}_q),\ \forall\, (b_1, b_2) \in B(k)^2, \Phi(b_1^{-1} g b_2) = \Phi(g)\}$,

1. Exemple : $q = p^n,\ k = \mathbb{F}_q,\ G(k) = GL_n(\mathbb{F}_q)$.
   $B(k) = \{$ matrices triangulaires supérieures inversibles $\}$
2. $H_n(q) := \{\Phi : GL_n(\mathbb{F}_q) \to R |\ \forall\, g \in GL_n(\mathbb{F}_q),\ \forall\,(b_1, b_2) \in B(k)^2, \Phi(b_1^{-1} g b_2) = \Phi(g)\}$,
3. $(\Phi_1, \Phi_2) \in H_n(q),\ \forall\, g \in GL_n(\mathbb{F}_q)$,

$$\Phi_1 * \Phi_2(g) = \frac{1}{|B(k)|} \sum_{g_1 g_2 = g} \Phi_1(g_1)\Phi_2(g_2)$$

.

1. Exemple :$q = p^n$, $k = \mathbb{F}_q$, $G(k) = GL_n(\mathbb{F}_q)$.
   $B(k) = \{$ matrices triangulaires supérieures inversibles $\}$
2. $H_n(q) := \{\Phi : GL_n(\mathbb{F}_q) \to R | \, \forall \, g \in GL_n(\mathbb{F}_q), \, \forall \, (b_1, b_2) \in B(k)^2 \, , \Phi(b_1^{-1} g b_2) = \Phi(g)\}$,
3. $(\Phi_1, \Phi_2) \in H_n(q)$, $\forall \, g \in GL_n(\mathbb{F}_q)$,
   $$\Phi_1 * \Phi_2(g) = \frac{1}{|B(k)|} \sum_{g_1 g_2 = g} \Phi_1(g_1)\Phi_2(g_2)$$
   .
4. $G(k) = \bigsqcup_{w \in W} B(k) w B(k)$

1. Exemple : $q = p^n$, $k = \mathbb{F}_q$, $G(k) = GL_n(\mathbb{F}_q)$.
   $B(k) = \{$ matrices triangulaires supérieures inversibles $\}$
2. $H_n(q) := \{\Phi : GL_n(\mathbb{F}_q) \to R | \, \forall\, g \in GL_n(\mathbb{F}_q), \forall\, (b_1, b_2) \in B(k)^2, \Phi(b_1^{-1} g b_2) = \Phi(g)\}$,
3. $(\Phi_1, \Phi_2) \in H_n(q)$, $\forall\, g \in GL_n(\mathbb{F}_q)$,

$$\Phi_1 * \Phi_2(g) = \frac{1}{|B(k)|} \sum_{g_1 g_2 = g} \Phi_1(g_1)\Phi_2(g_2)$$

.

4. $G(k) = \bigsqcup_{w \in W} B(k) w B(k)$
5. $H_n(q)$ admet pour base la famille $(T_w)_{w \in \mathfrak{S}_n}$ des fonctions caractéristiques des doubles-classes $B(k)wB(k)$, $w \in \mathfrak{S}_n$.

Introduction

Théorème

1. *q une indéterminée où $q \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$. L'algèbre de Hecke $H_n(q)$ admet une présentation comme $R(q)$-algèbre par les générateurs T_{s_i} $(1 \leq i \leq n-1)$ et les relations :*

Introduction

Théorème

1. *q une indéterminée où $q \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$. L'algèbre de Hecke $H_n(q)$ admet une présentation comme $R(q)$-algèbre par les générateurs T_{s_i} $(1 \leq i \leq n-1)$ et les relations :*
2. $(T_{s_i} - q)(T_{s_i} + 1) = 0, \ \forall\, i \in \{1, \ldots, n-1\}$

Introduction

Théorème

1. *q une indéterminée où $q \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$. L'algèbre de Hecke $H_n(q)$ admet une présentation comme $R(q)$-algèbre par les générateurs T_{s_i} $(1 \leq i \leq n-1)$ et les relations :*
2. $(T_{s_i} - q)(T_{s_i} + 1) = 0, \ \forall\, i \in \{1, \ldots, n-1\}$
3. $T_{s_i} T_{s_{i+1}} T_{s_i} = T_{s_{i+1}} T_{s_i} T_{s_{i+1}}, \ \forall\, i \in \{1, \ldots, n-2\}$

Introduction

Théorème

1. *q une indéterminée où $q \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$. L'algèbre de Hecke $H_n(q)$ admet une présentation comme $R(q)$-algèbre par les générateurs T_{s_i} $(1 \leq i \leq n-1)$ et les relations :*
2. $(T_{s_i} - q)(T_{s_i} + 1) = 0, \ \forall\, i \in \{1, \ldots, n-1\}$
3. $T_{s_i} T_{s_{i+1}} T_{s_i} = T_{s_{i+1}} T_{s_i} T_{s_{i+1}}, \ \forall\, i \in \{1, \ldots, n-2\}$
4. $T_{s_i} T_{s_j} = T_{s_j} T_{s_i}, \ \forall\, i, j$ *tel que* $|i - j| \geq 2$.

Introduction

Algèbre de Yokonuma-Hecke.

1. k corps fini.

Introduction

Algèbre de Yokonuma-Hecke.

1. k corps fini.
2. $G(k)$ groupe de Chevalley.

Introduction

Algèbre de Yokonuma-Hecke.

1. k corps fini.
2. $G(k)$ groupe de Chevalley.
3. $B(k)$ sous groupe de Borel de $G(k)$.

Introduction

Algèbre de Yokonuma-Hecke.

1. k corps fini.
2. $G(k)$ groupe de Chevalley.
3. $B(k)$ sous groupe de Borel de $G(k)$.
4. T tore maximal.

Introduction

Algèbre de Yokonuma-Hecke.

1. k corps fini.
2. $G(k)$ groupe de Chevalley.
3. $B(k)$ sous groupe de Borel de $G(k)$.
4. T tore maximal.
5. (W, S) : groupe de Weyl.

Introduction

Algèbre de Yokonuma-Hecke.

1. k corps fini.
2. $G(k)$ groupe de Chevalley.
3. $B(k)$ sous groupe de Borel de $G(k)$.
4. T tore maximal.
5. (W, S) : groupe de Weyl.
6. $U(k)$: radical unipotent de $G(k)$.

Introduction

Algèbre de Yokonuma-Hecke.

1. k corps fini.
2. $G(k)$ groupe de Chevalley.
3. $B(k)$ sous groupe de Borel de $G(k)$.
4. T tore maximal.
5. (W, S) : groupe de Weyl.
6. $U(k)$: radical unipotent de $G(k)$.
7. $\mathcal{G} = R[U(k)\backslash G(k)/U(k)]$: Algèbre de Yokonuma-Hecke.

Introduction

Yokonuma-Hecke en type A.

Définition (Algèbre de Yokonuma-Hecke de type A)

Soient $d \in \mathbb{N}$ et $u \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. On note $\mathcal{G}_{d,n}(u)$ cette algèbre. Générateurs : $h_1, \ldots, h_{l-1}$ et $a_1, \ldots, a_l$. Relations :

1. $h_i h_{i+1} h_i = h_{i+1} h_i h_{i+1}, \ \forall\, i \in \{1, \ldots, n-1\}$
2. $h_i h_j = h_j h_i, \ \forall\, |i-j| \geq 2$
3. $a_i a_j = a_j a_i, \ \forall\, i, j$
4. $h_i a_j = a_{s_i(j)} h_i, \ \forall\, i, j$ *avec* $s_i = (i, i+1)$
5. $a_i^d = 1, \ \forall\, i$
6. $h_i^2 = 1 + (u-1) e_i (1 + h_i)$ *où*
   $e_{i,j} = \frac{1}{u} - \sum_{s=0}^{d-1} a_i^s a_j^{-s}, \ i \neq j, \ 1 \leq j, i \leq n$

La sous algèbre de $\mathcal{G}_{d,n}(u)$ engendrée par les (a_i) et les (e_i) est l'algèbre Braids and Ties BT_n (Juyumaya et Aicardi).

introduction

Remarque

Marin montre que BT_n peut être vu comme une extension de l'algèbre de Hecke de type A par le treillis des sous groupe de réflexions de $\mathfrak{S}_n$.

Introduction

L'algèbre $\mathcal{C}_W$.

Définition (M, 2016)

Soit (S, W) groupe de Coxeter fini. $\mathcal{R}$ l'ensemble de ses réflexions. On pose $u = (u_s)_{s \in S}$ tel que si $s_1 \sim s_2$ alors $u_{s_1} = u_{s_2}$. L'algèbre $\mathcal{C}_W(u)$ est la k-algèbre définie par générateurs $(g_s, e_t)_{s \in S, t \in \mathcal{R}}$ et relations :

1. $\underbrace{g_s g_t g_s \dots}_{m_{st}} = \underbrace{g_t g_s g_t \dots}_{m_{st}}$ *pour $s, t \in S$.*
2. $e_t^2 = e_t$ *pour tout $t \in \mathcal{R}$.*
3. $e_{t_1} e_{t_2} = e_{t_2} e_{t_1}$ *pour tout $t_1, t_2 \in \mathcal{R}$*
4. $e_t e_{t_1} = e_t e_{t t_1 t^{-1}}$ *pour tout $t, t_1, t_2 \in \mathcal{R}$*
5. $g_s e_t = e_{sts} g_s$ *pour tout $s \in S$ et $t \in \mathcal{R}$*
6. $g_s^2 = 1 + (u_s - 1) e_s (1 + g_s)$ *pour tout $s \in S$*

Introduction

Proposition (I.Marin, 2016)

Soit (W, S) un système de Coxeter. L'application $g_s \mapsto T_s$, $e_s \mapsto 1$ induit un morphisme surjectif d'algèbres, $p : \mathcal{C}_W(u) \twoheadrightarrow H(W)$.

Introduction

Proposition (I.Marin, 2016)

Soit (W, S) un système de Coxeter. L'application $g_s \mapsto T_s$, $e_s \mapsto 1$ induit un morphisme surjectif d'algèbres, $p : \mathcal{C}_W(u) \twoheadrightarrow H(W)$.

Marin étend la définition de $\mathcal{C}_W$ aux groupes de réflexions complexes finis.

1. $\dim_{\mathbb{C}}(V) < +\infty$.

1. $\dim_{\mathbb{C}}(V) < +\infty$.
2. $W < GL(V)$, $|W| < +\infty$.

1. $\dim_{\mathbb{C}}(V) < +\infty$.
2. $W < GL(V)$, $|W| < +\infty$.
3. $\mathcal{R} := \{s \in W | \mathrm{codim}(V^s) = 1\}$

1. $\dim_{\mathbb{C}}(V) < +\infty$.
2. $W < GL(V)$, $|W| < +\infty$.
3. $\mathcal{R} := \{s \in W | \mathrm{codim}(V^s) = 1\}$
4. $\mathcal{A} := \{Ker(s-1) =: H | s \in \mathcal{R}\}$

1. $\dim_{\mathbb{C}}(V) < +\infty$.
2. $W < GL(V)$, $|W| < +\infty$.
3. $\mathcal{R} := \{s \in W | \operatorname{codim}(V^s) = 1\}$
4. $\mathcal{A} := \{Ker(s-1) =: H | s \in \mathcal{R}\}$
5. $X := V \smallsetminus \bigcup \mathcal{A}$

1. $\dim_{\mathbb{C}}(V) < +\infty$.
2. $W < GL(V)$, $|W| < +\infty$.
3. $\mathcal{R} := \{s \in W | \mathrm{codim}(V^s) = 1\}$
4. $\mathcal{A} := \{Ker(s-1) =: H | s \in \mathcal{R}\}$
5. $X := V \setminus \bigcup \mathcal{A}$
6. $H \in \mathcal{A}$, $(k_{H,j})_{j \in \{0,\ldots,m_H-1\}}$, $m_H := |Fix_W(H)|$. Pour tout $w \in W$, $k_{w(H),j} = k_{H,j}$.

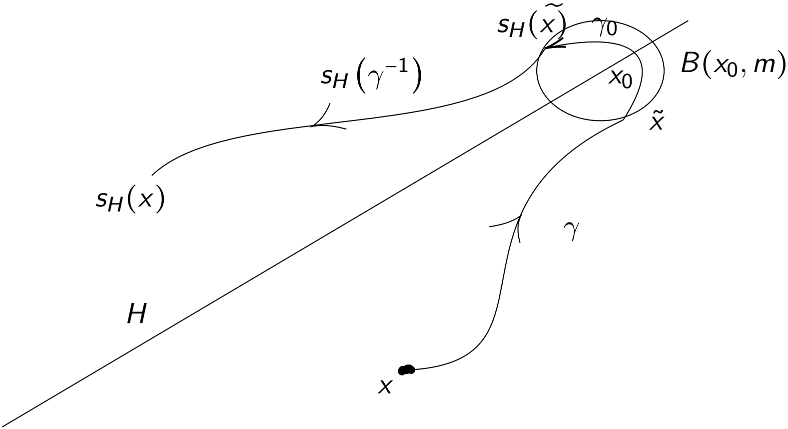
Groupe de tresse complexe

$$B(W) := \pi_1\left(\frac{X}{W}\right)$$

Groupe de tresse complexe

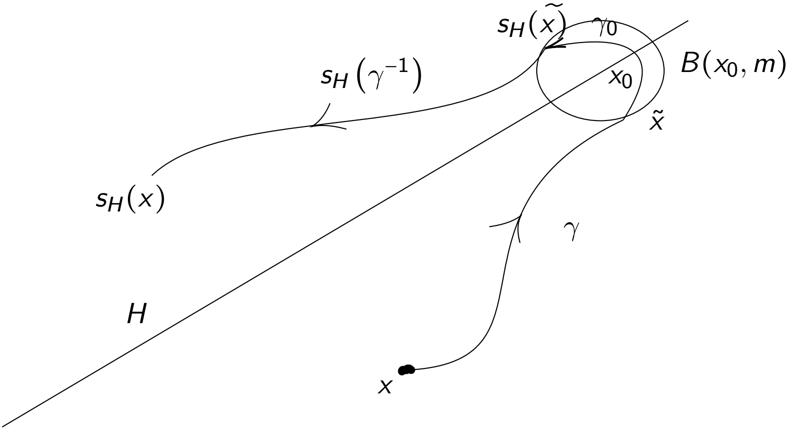
$B(W) := \pi_1(\frac{X}{W})$

Réflexion tressées :



Groupe de tresse complexe

$B(W) := \pi_1(\frac{X}{W})$
Réflexion tressées :

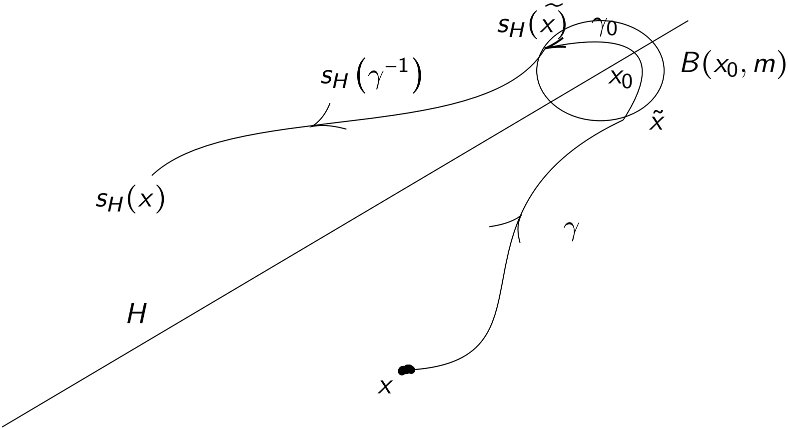


$\gamma_0(t) := e^{\frac{2\pi it}{m_H}} p_D(x) + p_H(x).$

Groupe de tresse complexe

$B(W) := \pi_1(\frac{X}{W})$

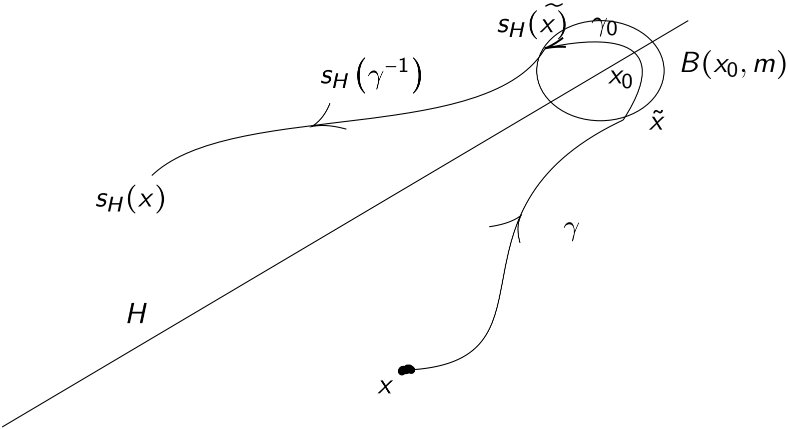
Réflexion tressées :



$\gamma_0(t) := e^{\frac{2\pi it}{m_H}} p_D(x) + p_H(x)$. $\sigma_H := [s_H(\gamma^{-1}) \circ \gamma_0 \circ \gamma]$

Groupe de tresse complexe

$B(W) := \pi_1(\frac{X}{W})$
Réflexion tressées :



$\gamma_0(t) := e^{\frac{2\pi i t}{m_H}} p_D(x) + p_H(x)$. $\sigma_H := [s_H(\gamma^{-1}) \circ \gamma_0 \circ \gamma]$
$H(W) := \mathbb{C}B(W) / < (\sigma_H^{m_H} = \sum_{j=0}^{m_H - 1} k_{H,j} \sigma_H^j) >$

$\mathcal{C}(\mathcal{L}, W)$ est une extension de $H(W)$ par l'algèbre $\mathbb{C}\mathcal{L}$.

Soit $(\mathcal{L}, \vee)$ un treillis fini. Son algèbre de Möbius $\mathbb{C}\mathcal{L}$ est un $\mathbb{C}$-module libre, dont une base est e_λ, $\lambda \in \mathcal{L}$ et $e_\lambda . e_\mu = e_{\lambda \vee \mu}$.

$\mathcal{C}(\mathcal{L}, W)$ est une extension de $H(W)$ par l'algèbre $\mathbb{C}\mathcal{L}$.

Soit $(\mathcal{L}, \vee)$ un treillis fini. Son algèbre de Möbius $\mathbb{C}\mathcal{L}$ est un $\mathbb{C}$-module libre, dont une base est e_λ, $\lambda \in \mathcal{L}$ et $e_\lambda . e_\mu = e_{\lambda \vee \mu}$. Soit $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ l'ensemble des intersection d'éléments de $\mathcal{A}$. C'est un treillis : $P_1 \vee P_2 = P_1 \cap P_2$.

$\mathcal{C}(\mathcal{L}, W)$ est une extension de $H(W)$ par l'algèbre $\mathbb{C}\mathcal{L}$.

Soit $(\mathcal{L}, \vee)$ un treillis fini. Son algèbre de Möbius $\mathbb{C}\mathcal{L}$ est un $\mathbb{C}$-module libre, dont une base est e_λ, $\lambda \in \mathcal{L}$ et $e_\lambda . e_\mu = e_{\lambda \vee \mu}$. Soit $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ l'ensemble des intersection d'éléments de $\mathcal{A}$. C'est un treillis : $P_1 \vee P_2 = P_1 \cap P_2$. Son algèbre de Möbius est engendrée par $e_{\{H\}}$, $H \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{C}(\mathcal{L}, W)$ est une extension de $H(W)$ par l'algèbre $\mathbb{C}\mathcal{L}$.

Soit $(\mathcal{L}, \vee)$ un treillis fini. Son algèbre de Möbius $\mathbb{C}\mathcal{L}$ est un $\mathbb{C}$-module libre, dont une base est e_λ, $\lambda \in \mathcal{L}$ et $e_\lambda . e_\mu = e_{\lambda \vee \mu}$. Soit $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ l'ensemble des intersection d'éléments de $\mathcal{A}$. C'est un treillis : $P_1 \vee P_2 = P_1 \cap P_2$. Son algèbre de Möbius est engendrée par $e_{\{H\}}$, $H \in \mathcal{A}$.
$\mathcal{L}(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{L}_p$ où $\mathcal{L}_p$ est le treillis des sous groupes paraboliques de W.

Définition (L'algèbre $\mathcal{C}(\mathcal{L}, W)$)

$$\mathcal{C}(\mathcal{L}, W) := \frac{\mathbb{C}\mathcal{L} \rtimes B(W)}{\mathcal{J}}$$

où $\mathcal{J} :=< \sigma_H^{m_H} - 1 = Q_{s_H}(\sigma_H) e_H,\ H \in \mathcal{A} >$,
$Q_{s_H}(X) = \sum_{i=0}^{m_H - 1} k_{H,j} X^j - 1$

1. $W_0 < W$.

1. $W_0 < W$.
2. $\mathcal{R}_0 := \{s \in W_0 | codim(V^s) = 1\}$.

1. $W_0 < W$.
2. $\mathcal{R}_0 := \{s \in W_0 | codim(V^s) = 1\}$.
3. $\mathcal{A}_0 := \{Ker(s-1) =: H | s \in \mathcal{R}_0\}$

1. $W_0 < W$.
2. $\mathcal{R}_0 := \{s \in W_0 | codim(V^s) = 1\}$.
3. $\mathcal{A}_0 := \{Ker(s-1) =: H | s \in \mathcal{R}_0\}$
4. $X_0 := V \setminus \bigcup \mathcal{A}_0$

Extension de l'algèbre $H(W_0)$ par l'algèbre de Hecke de $N_W(W_0)$.

1. $N_W(W_0)$ normalisateur de W_0 dans W.
2. $\hat{B}_0 := \pi_1(\frac{X}{N_W(W_0)})$

Définition

$$H(W_0, W) := \frac{\mathbb{C}\hat{B}_0}{J}$$

Extension de l'algèbre $H(W_0)$ par l'algèbre de Hecke de $N_W(W_0)$.

1. $N_W(W_0)$ normalisateur de W_0 dans W.
2. $\hat{B}_0 := \pi_1(\frac{X}{N_W(W_0)})$

Définition

$$H(W_0, W) := \frac{\mathbb{C}\hat{B}_0}{J}$$

où $J =< \sigma_H^{m_H} = 1,\ H \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_0 | \sigma_H^{m_H} = \sum_{j=0}^{m_H-1} k_{H,j}\sigma_H^j, H \in \mathcal{A}_0 >$, σ_H *est une réflexion tressée.*

Extension de l'algèbre $H(W_0)$ par l'algèbre de Hecke de $N_W(W_0)$.

1. $N_W(W_0)$ normalisateur de W_0 dans W.
2. $\hat{B}_0 := \pi_1(\frac{X}{N_W(W_0)})$

Définition

$$H(W_0, W) := \frac{\mathbb{C}\hat{B}_0}{J}$$

où $J =< \sigma_H^{m_H} = 1, H \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_0 | \sigma_H^{m_H} = \sum_{j=0}^{m_H-1} k_{H,j}\sigma_H^j, H \in \mathcal{A}_0 >$, σ_H *est une réflexion tressée.*

Théorème (I.Marin, 2017)

On a un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres :

$$\mathcal{C}(\mathcal{L}, W) \simeq \bigoplus_{[W_0] \in \mathcal{L}/W} Mat_{|[W_0]|}(H(W_0, W))$$

Introduction

Opérateurs de Dunkl-Opdam

Introduction

Opérateurs de Dunkl-Opdam

Algèbre de Hecke $H(W)$

Introduction

$$\begin{tikzcd} \text{Opérateurs de Dunkl-Opdam} \arrow[d] & \text{Algèbre de Hecke } H(W) \arrow[dl] \\ \text{Algèbre de Cherednik / foncteur KZ} & \end{tikzcd}$$

Introduction

$$\begin{tikzcd}
\text{Opérateurs de Dunkl-Opdam} \arrow[d] & \text{Algèbre de Hecke } H(W) \arrow[dl] \arrow[d] \\
\text{Algèbre de Cherednik / foncteur KZ} & \text{Algèbres } \mathcal{C}(\mathcal{L}, W) \text{ et } H(W_0, W)
\end{tikzcd}$$

Introduction

$$
\begin{tikzcd}
\text{Opérateurs de Dunkl-Opdam} \arrow[d] & \text{Algèbre de Hecke } H(W) \arrow[dl] \arrow[d] \\
\text{Algèbre de Cherednik / foncteur KZ} \arrow[dr] & \text{Algèbres } \mathcal{C}(\mathcal{L}, W) \text{ et } H(W_0, W) \arrow[d] \\
 & ?
\end{tikzcd}
$$

Plan :

1. L'algèbre de Cherednik de $N_W(W_0)$ et de la paire $(\mathcal{L}, W)$

Plan :

1. L'algèbre de Cherednik de $N_W(W_0)$ et de la paire $(\mathcal{L}, W)$
   - Opérateur de Dunkl-Opdam

Plan :

1. L'algèbre de Cherednik de $N_W(W_0)$ et de la paire $(\mathcal{L}, W)$
   - Opérateur de Dunkl-Opdam
   - Les catégories $\mathcal{O}(W_0, W)$ et $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$

Plan :

1. L'algèbre de Cherednik de $N_W(W_0)$ et de la paire $(\mathcal{L}, W)$
   - Opérateur de Dunkl-Opdam
   - Les catégories $\mathcal{O}(W_0, W)$ et $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$
2. Foncteurs KZ_0 et $\widetilde{KZ}$

Plan :

1. L'algèbre de Cherednik de $N_W(W_0)$ et de la paire $(\mathcal{L}, W)$
   - Opérateur de Dunkl-Opdam
   - Les catégories $\mathcal{O}(W_0, W)$ et $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$
2. Foncteurs KZ_0 et $\widetilde{KZ}$
   - Le foncteur de localisation .

Plan :

1. L'algèbre de Cherednik de $N_W(W_0)$ et de la paire $(\mathcal{L}, W)$
   - Opérateur de Dunkl-Opdam
   - Les catégories $\mathcal{O}(W_0, W)$ et $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$
2. Foncteurs KZ_0 et $\widetilde{KZ}$
   - Le foncteur de localisation .
   - Équivalence de Riemann-Hilbert-Deligne.

Algèbre de Cherednik de $N_W(W_0)$.

Définition (Algèbre de Cherednik de $N_W(W_0)$)

$$A_t(W_0, W) := \frac{T(V \oplus V^*) \rtimes N_W(W_0)}{I}$$

1. $A_t(W_0, W)$ est isomorphe en tant qu'espace vectoriel à $\mathbb{C}[V] \otimes \mathbb{C}N_W(W_0) \otimes \mathbb{C}[V^*]$

Algèbre de Cherednik de $N_W(W_0)$.

Définition (Algèbre de Cherednik de $N_W(W_0)$)

$$A_t(W_0, W) := \frac{T(V \oplus V^*) \rtimes N_W(W_0)}{I}$$

1. $A_t(W_0, W)$ est isomorphe en tant qu'espace vectoriel à $\mathbb{C}[V] \otimes \mathbb{C}N_W(W_0) \otimes \mathbb{C}[V^*]$
2. I est engendré par
   1. $[x, x'] = 0, \forall\, x, x' \in (V^*)^2$

Algèbre de Cherednik de $N_W(W_0)$.

Définition (Algèbre de Cherednik de $N_W(W_0)$)

$A_t(W_0, W) := \frac{T(V \oplus V^*) \rtimes N_W(W_0)}{I}$

1. $A_t(W_0, W)$ est isomorphe en tant qu'espace vectoriel à $\mathbb{C}[V] \otimes \mathbb{C}N_W(W_0) \otimes \mathbb{C}[V^*]$
2. I est engendré par
   1. $[x, x'] = 0, \forall\, x, x' \in (V^*)^2$
   2. $[y, y'] = 0 \;\forall\, y, y' \in V^2$

Algèbre de Cherednik de $N_W(W_0)$.

Définition (Algèbre de Cherednik de $N_W(W_0)$)

$$A_t(W_0, W) := \frac{T(V \oplus V^*) \rtimes N_W(W_0)}{I}$$

1. $A_t(W_0, W)$ est isomorphe en tant qu'espace vectoriel à $\mathbb{C}[V] \otimes \mathbb{C}N_W(W_0) \otimes \mathbb{C}[V^*]$
2. I est engendré par
   1. $[x, x'] = 0, \forall\, x, x' \in (V^*)^2$
   2. $[y, y'] = 0 \;\forall\, y, y' \in V^2$
   3. $[y, x] = t.x(y) + \sum_{H \in \mathcal{A}_0} \frac{\alpha_H(y) x(v_H)}{\alpha_H(v_H)} \gamma_H$

Algèbre de Cherednik de $N_W(W_0)$.

Définition (Algèbre de Cherednik de $N_W(W_0)$)

$$A_t(W_0, W) := \frac{T(V \oplus V^*) \rtimes N_W(W_0)}{I}$$

1. $A_t(W_0, W)$ est isomorphe en tant qu'espace vectoriel à $\mathbb{C}[V] \otimes \mathbb{C}N_W(W_0) \otimes \mathbb{C}[V^*]$
2. I est engendré par
    1. $[x, x'] = 0, \forall\, x, x' \in (V^*)^2$
    2. $[y, y'] = 0\ \forall\, y, y' \in V^2$
    3. $[y, x] = t.x(y) + \sum_{H \in \mathcal{A}_0} \frac{\alpha_H(y) x(v_H)}{\alpha_H(v_H)} \gamma_H$
    4. $t = 1$

Algèbre de Cherednik de $N_W(W_0)$.

Définition (Algèbre de Cherednik de $N_W(W_0)$)

$$A_t(W_0, W) := \frac{T(V \oplus V^*) \rtimes N_W(W_0)}{I}$$

1. $A_t(W_0, W)$ est isomorphe en tant qu'espace vectoriel à $\mathbb{C}[V] \otimes \mathbb{C}N_W(W_0) \otimes \mathbb{C}[V^*]$
2. I est engendré par
   1. $[x, x'] = 0, \forall\, x, x' \in (V^*)^2$
   2. $[y, y'] = 0 \;\forall\, y, y' \in V^2$
   3. $[y, x] = t.x(y) + \sum_{H \in \mathcal{A}_0} \dfrac{\alpha_H(y)x(v_H)}{\alpha_H(v_H)}\gamma_H$
   4. $t = 1$
3. $A(W_0, W)_{reg} \simeq \mathbb{C}[X] \otimes_{\mathbb{C}[V]} A(W_0, W)$ $(\delta = \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H$, $X = V \setminus Z(\delta))$

L'algèbre de Cherednik de la paire $(\mathcal{L}, W)$

Définition

1. $A_t(\mathcal{L}, W) : \mathbb{C}[V] \otimes \mathbb{C}\mathcal{L} \otimes \mathbb{C}W \otimes \mathbb{C}[V^*]$ *comme* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel.*

L'algèbre de Cherednik de la paire $(\mathcal{L}, W)$

Définition

1. $A_t(\mathcal{L}, W) : \mathbb{C}[V] \otimes \mathbb{C}\mathcal{L} \otimes \mathbb{C}W \otimes \mathbb{C}[V^*]$ *comme* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel.*
2. $w.x = w(x).w, \ \forall\, x \in V^*, \ \forall\, w \in W$

L'algèbre de Cherednik de la paire $(\mathcal{L}, W)$

Définition

1. $A_t(\mathcal{L}, W) : \mathbb{C}[V] \otimes \mathbb{C}\mathcal{L} \otimes \mathbb{C}W \otimes \mathbb{C}[V^*]$ *comme* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel.*
2. $w.x = w(x).w, \; \forall\, x \in V^*, \; \forall\, w \in W$
3. $w.y = w(y).w, \; \forall\, w \in W, \; \forall\, y \in V.$
4. $[y, y'] = 0\,, \forall\, (y, y') \in V^2.$

L'algèbre de Cherednik de la paire $(\mathcal{L}, W)$

Définition

1. $A_t(\mathcal{L}, W) : \mathbb{C}[V] \otimes \mathbb{C}\mathcal{L} \otimes \mathbb{C}W \otimes \mathbb{C}[V^*]$ *comme* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel.*
2. $w.x = w(x).w, \ \forall\, x \in V^*, \ \forall\, w \in W$
3. $w.y = w(y).w, \ \forall\, w \in W, \ \forall\, y \in V.$
4. $[y, y'] = 0\,, \forall\, (y, y') \in V^2.$
5. $[x, x'] = 0\,, \forall\, (x, x') \in (V^*)^2.$

L'algèbre de Cherednik de la paire $(\mathcal{L}, W)$

Définition

1. $A_t(\mathcal{L}, W) : \mathbb{C}[V] \otimes \mathbb{C}\mathcal{L} \otimes \mathbb{C}W \otimes \mathbb{C}[V^*]$ *comme* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel.*
2. $w.x = w(x).w, \ \forall\, x \in V^*, \ \forall\, w \in W$
3. $w.y = w(y).w, \ \forall\, w \in W, \ \forall\, y \in V.$
4. $[y, y'] = 0\,, \forall\, (y, y') \in V^2.$
5. $[x, x'] = 0\,, \forall\, (x, x') \in (V^*)^2.$
6. $[y, x] = t.x(y) + \sum_{H \in \mathcal{A}} \dfrac{\alpha_H(y) x(v_H)}{\alpha_H(v_H)} \gamma_H e_H,$ *pour tout* $(y, x) \in V \times V^*$

L'algèbre de Cherednik de la paire $(\mathcal{L}, W)$

Définition

1. $A_t(\mathcal{L}, W) : \mathbb{C}[V] \otimes \mathbb{C}\mathcal{L} \otimes \mathbb{C}W \otimes \mathbb{C}[V^*]$ *comme* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel.*
2. $w.x = w(x).w, \ \forall\, x \in V^*, \ \forall\, w \in W$
3. $w.y = w(y).w, \ \forall\, w \in W, \ \forall\, y \in V.$
4. $[y, y'] = 0\,, \forall\, (y, y') \in V^2.$
5. $[x, x'] = 0\,, \forall\, (x, x') \in (V^*)^2.$
6. $[y, x] = t.x(y) + \sum_{H \in \mathcal{A}} \frac{\alpha_H(y)x(v_H)}{\alpha_H(v_H)} \gamma_H e_H$, *pour tout* $(y, x) \in V \times V^*$
7. $[e_H, e_{H'}] = 0$ *pour tout* $(H, H') \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$

L'algèbre de Cherednik de la paire $(\mathcal{L}, W)$

Définition

1. $A_t(\mathcal{L}, W) : \mathbb{C}[V] \otimes \mathbb{C}\mathcal{L} \otimes \mathbb{C}W \otimes \mathbb{C}[V^*]$ *comme* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel.*
2. $w.x = w(x).w, \ \forall\, x \in V^*, \ \forall\, w \in W$
3. $w.y = w(y).w, \ \forall\, w \in W, \ \forall\, y \in V.$
4. $[y, y'] = 0\,, \forall\,(y, y') \in V^2.$
5. $[x, x'] = 0\,, \forall\,(x, x') \in (V^*)^2.$
6. $[y, x] = t.x(y) + \sum_{H \in \mathcal{A}} \frac{\alpha_H(y)x(v_H)}{\alpha_H(v_H)} \gamma_H e_H$, *pour tout* $(y, x) \in V \times V^*$
7. $[e_H, e_{H'}] = 0$ *pour tout* $(H, H') \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$

1. $t = 1$

L'algèbre de Cherednik de la paire $(\mathcal{L}, W)$

Définition

1. $A_t(\mathcal{L}, W) : \mathbb{C}[V] \otimes \mathbb{C}\mathcal{L} \otimes \mathbb{C}W \otimes \mathbb{C}[V^*]$ *comme* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel.*
2. $w.x = w(x).w, \ \forall\, x \in V^*, \ \forall\, w \in W$
3. $w.y = w(y).w, \ \forall\, w \in W, \ \forall\, y \in V.$
4. $[y, y'] = 0\,, \forall\, (y, y') \in V^2.$
5. $[x, x'] = 0\,, \forall\, (x, x') \in (V^*)^2.$
6. $[y, x] = t.x(y) + \sum_{H \in \mathcal{A}} \frac{\alpha_H(y)x(v_H)}{\alpha_H(v_H)} \gamma_H e_H,$ *pour tout* $(y, x) \in V \times V^*$
7. $[e_H, e_{H'}] = 0$ *pour tout* $(H, H') \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$

1. $t = 1$
2. $A(\mathcal{L}, W)_{reg} := \mathbb{C}[X] \otimes_{\mathbb{C}[V]} A(\mathcal{L}, W)$

Opérateur de Dunkl-Opdam T_y

Proposition (MG, 2020)

On a une 1-forme différentielle $N_W(W_0)$-équivariante et intégrable

$$\omega_0 := \sum_{H \in \mathcal{A}_0} a_H \frac{d\alpha_H}{\alpha_H} \in \Omega^1(X) \otimes \mathbb{C}W_0$$

où $a_H := \sum_{j=0}^{m_H-1} m_H k_{H,j} \epsilon_{H,j} \in \mathbb{C}W_0$.

Opérateur de Dunkl-Opdam T_y

Proposition (MG, 2020)

On a une 1-forme différentielle $N_W(W_0)$-équivariante et intégrable

$$\omega_0 := \sum_{H \in \mathcal{A}_0} a_H \frac{d\alpha_H}{\alpha_H} \in \Omega^1(X) \otimes \mathbb{C}W_0$$

où $a_H := \sum_{j=0}^{m_H - 1} m_H k_{H,j} \epsilon_{H,j} \in \mathbb{C}W_0$.

$\nabla_0 := \omega_0 + d$

Opérateur de Dunkl-Opdam T_y

Proposition (MG, 2020)

On a une 1-forme différentielle $N_W(W_0)$-équivariante et intégrable

$$\omega_0 := \sum_{H \in \mathcal{A}_0} a_H \frac{d\alpha_H}{\alpha_H} \in \Omega^1(X) \otimes \mathbb{C}W_0$$

où $a_H := \sum_{j=0}^{m_H - 1} m_H k_{H,j} \epsilon_{H,j} \in \mathbb{C}W_0$.

$\nabla_0 := \omega_0 + d$

Définition

La dérivation covariante de ∇_0 le long $y \in V$ est
$T_y := \partial_y + \sum_{H \in \mathcal{A}_0} \frac{\alpha_H(y)}{\alpha_H} a_H \in \mathcal{D}(X) \rtimes N_W(W_0)$

Opérateur de Dunkl-Opdam T_y

Proposition

1. *Pour tout* $(y, y') \in V^2$, $[T_y, T_{y'}] = 0$
2. *Pour tout* $g \in N_W(W_0)$ *et pour tout* $y \in V$, $g.T_y.g^{-1} = T_{g(y)}$.

Opérateur de Dunkl-Opdam $\widetilde{T_y}$

Proposition (I.Marin, 2019)

On a une 1-forme différentiel, W-equivariante et intégrable $\widetilde{\omega} := \sum_{H \in \mathcal{A}} \frac{d\alpha_H}{\alpha_H} a_H e_H \in \Omega^1(X) \otimes \mathbb{C}\mathcal{L} \otimes \mathbb{C}W$

Opérateur de Dunkl-Opdam $\widetilde{T_y}$

Proposition (I.Marin, 2019)

On a une 1-forme différentiel, W-equivariante et intégrable $\widetilde{\omega} := \sum_{H \in \mathcal{A}} \frac{d\alpha_H}{\alpha_H} a_H e_H \in \Omega^1(X) \otimes \mathbb{C}\mathcal{L} \otimes \mathbb{C}W$

$\widetilde{\nabla} := \widetilde{\omega} + d$

Opérateur de Dunkl-Opdam $\widetilde{T_y}$

Proposition (I.Marin, 2019)

On a une 1-forme différentiel, W-equivariante et intégrable
$\widetilde{\omega} := \sum_{H \in \mathcal{A}} \frac{d\alpha_H}{\alpha_H} a_H e_H \in \Omega^1(X) \otimes \mathbb{C}\mathcal{L} \otimes \mathbb{C}W$

$\widetilde{\nabla} := \widetilde{\omega} + d$

Définition

La dérivation covariante de $\widetilde{\nabla}$ le long $y \in V$ est
$\widetilde{T}_y := \partial_y + \sum_{H \in \mathcal{A}} \frac{\alpha_H(y)}{\alpha_H} a_H e_H \in (\mathcal{D}(X) \otimes \mathbb{C}\mathcal{L}) \rtimes W$

Opérateur de Dunkl-Opdam $\widetilde{T}_y$

Proposition

1. *Pour tout* $y, y' \in V^2$, $[\widetilde{T}_y, \widetilde{T}_{y'}] = 0$
2. *Pour tout* $y \in V$ *et* $g \in W$, $g.\widetilde{T}_y.g^{-1} = \widetilde{T}_{g(y)}$

Plongement de Dunkl

Théorème

1. *On a un morphisme injectif d'algèbres*

$$\begin{array}{rrcl} \Phi : & A(W_0, W) & \longrightarrow & \mathcal{D}(X) \rtimes N_W(W_0) \\ & x \in V^* & \longmapsto & x \\ & y \in V & \longmapsto & T_y \\ & g \in N_W(W_0) & \longmapsto & g \end{array}$$

Plongement de Dunkl

Théorème

1. *On a un morphisme injectif d'algèbres*

$$\begin{array}{rrcl} \Phi : & A(W_0, W) & \longrightarrow & \mathcal{D}(X) \rtimes N_W(W_0) \\ & x \in V^* & \longmapsto & x \\ & y \in V & \longmapsto & T_y \\ & g \in N_W(W_0) & \longmapsto & g \end{array}$$

2. *Après localisation* $\Phi_{reg} : A(W_0, W)_{reg} \simeq \mathcal{D}(X) \rtimes N_W(W_0)$

Plongement de Dunkl

Théorème

1. *On a un morphisme injectif d'algèbres*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & A(\mathcal{L}, W) & \to & (\mathcal{D}(X) \otimes \mathbb{C}\mathcal{L}) \rtimes W \\ & x \in V^* & \longmapsto & x \\ & y \in V & \longmapsto & \widetilde{T}_y \\ & g \in W & \longmapsto & g \\ & e_\lambda \in \mathbb{C}\mathcal{L} & \longmapsto & e_\lambda \end{array}$$

Plongement de Dunkl

Théorème

1. *On a un morphisme injectif d'algèbres*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & A(\mathcal{L}, W) & \to & (\mathcal{D}(X) \otimes \mathbb{C}\mathcal{L}) \rtimes W \\ & x \in V^* & \longmapsto & x \\ & y \in V & \longmapsto & \widetilde{T}_y \\ & g \in W & \longmapsto & g \\ & e_\lambda \in \mathbb{C}\mathcal{L} & \longmapsto & e_\lambda \end{array}$$

2. *Après localisation* $\Phi_{reg} : A(\mathcal{L}, W)_{reg} \simeq (\mathcal{D}(X) \otimes \mathbb{C}\mathcal{L}) \rtimes W$

Les catégories $\mathcal{O}(W_0, W)$ et $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$

1. $M \in A(W_0, W)$-mod(resp. $A(\mathcal{L}, W)$-mod) est localement nilpotent pour l'action de $\mathbb{C}[V^*]$: $\forall\, m \in M$, $\exists N > 0$ tel que $\mathbb{C}[V^*]^{>N}.m = 0$.

Les catégories $\mathcal{O}(W_0, W)$ et $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$

1. $M \in A(W_0, W)$-mod(resp. $A(\mathcal{L}, W)$-mod) est localement nilpotent pour l'action de $\mathbb{C}[V^*]$: $\forall\, m \in M$, $\exists N > 0$ tel que $\mathbb{C}[V^*]^{>N}.m = 0$.
2. La catégorie des modules localement nilpotents pour l'action $\mathbb{C}[V^*]$ est une sous catégorie de Serre de $A(W_0, W)$-modules(resp. $A(\mathcal{L}, W)$-modules) .

Les catégories $\mathcal{O}(W_0, W)$ et $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$

Définition (Elément d'Euler)

Soit $\mathcal{B}$ base de V.

$$eu_0 := \sum_{y \in \mathcal{B}} y^*.y - \sum_{H \in \mathcal{A}_0} a_H$$

Les catégories $\mathcal{O}(W_0, W)$ et $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$

Définition (Elément d'Euler)

Soit $\mathcal{B}$ base de V.

$$eu_0 := \sum_{y \in \mathcal{B}} y^*.y - \sum_{H \in \mathcal{A}_0} a_H$$

Proposition

1. $[eu_0, x] = x, \ \forall\, x \in V^*$
2. $[eu_0, y] = -y, \ \forall\, y \in V$
3. $[eu_0, w] = 0, \ \forall\, w \in N_W(W_0)$

Les catégories $\mathcal{O}(W_0, W)$ et $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$

Définition (Elément d'Euler)

Soit $\mathcal{B}$ base de V.

$$eu_0 := \sum_{y \in \mathcal{B}} y^*.y - \sum_{H \in \mathcal{A}_0} a_H$$

Proposition

1. $[eu_0, x] = x, \ \forall\, x \in V^*$
2. $[eu_0, y] = -y, \ \forall\, y \in V$
3. $[eu_0, w] = 0, \ \forall\, w \in N_W(W_0)$

eu_0 induit une graduation intérieur sur $A(W_0, W)$,
$A^i := \{a \in A(W_0, W) | [eu_0, a] = ia\}, \ \forall\, i \in \mathbb{Z}$.

Les catégories $\mathcal{O}(W_0, W)$ et $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$

Élément d'Euler.

Définition (Elément d'Euler)

Soit $\mathcal{B}$ une base de V.

$$\widetilde{eu} := \sum_{y \in \mathcal{B}} y^* . y - \sum_{H \in \mathcal{A}} a_H e_H$$

Les catégories $\mathcal{O}(W_0, W)$ et $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$

Élément d'Euler.

Définition (Elément d'Euler)

Soit $\mathcal{B}$ une base de V.

$$\widetilde{eu} := \sum_{y \in \mathcal{B}} y^*.y - \sum_{H \in \mathcal{A}} a_H e_H$$

Proposition

1. $[\widetilde{eu}, x] = x, \ \forall\, x \in V^*$
2. $[\widetilde{eu}, y] = -y, \ \forall\, y \in V$
3. $[\widetilde{eu}, w] = 0, \ \forall\, w \in W$
4. $[\widetilde{eu}, e_H] = 0, \ \forall\, H \in \mathcal{A}$

Les catégories $\mathcal{O}(W_0, W)$ et $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$

Élément d'Euler.

Définition (Elément d'Euler)

Soit $\mathcal{B}$ une base de V.

$$\widetilde{eu} := \sum_{y \in \mathcal{B}} y^* . y - \sum_{H \in \mathcal{A}} a_H e_H$$

Proposition

1. $[\widetilde{eu}, x] = x, \ \forall \, x \in V^*$
2. $[\widetilde{eu}, y] = -y, \ \forall \, y \in V$
3. $[\widetilde{eu}, w] = 0, \ \forall \, w \in W$
4. $[\widetilde{eu}, e_H] = 0, \ \forall \, H \in \mathcal{A}$

$\widetilde{eu}$ induit une graduation intérieur sur $A(\mathcal{L}, W)$,
$A^i := \{a \in A(\mathcal{L}, W) | [\widetilde{eu}, a] = ia\}, \ \forall \, i \in \mathbb{Z}$.

Les catégories $\mathcal{O}(W_0, W)$ et $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$

L'élément $\sum_{H\in\mathcal{A}_0} a_H \in Z(\mathbb{C}N_W(W_0))$, donc $\sum_{H\in\mathcal{A}_0} a_H$ agit par multiplication par un scalaire c_E sur tout $E \in Irr(\mathbb{C}N_W(W_0))$.

Définition (Ordre sur partiel sur $Irr(\mathbb{C}\mathcal{L} \rtimes W)$ et $Irr(N_W(W_0))$)

On définit un ordre partiel sur $Irr(N_W(W_0))$ par $E < F$ si $c_F - c_E \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Les catégories $\mathcal{O}(W_0, W)$ et $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$

L'élément $\sum_{H \in \mathcal{A}} a_H e_H \in Z(\mathbb{C}\mathcal{L} \rtimes W)$, donc $\sum_{H \in \mathcal{A}} a_H e_H$ agit par multiplication par un scalaire c_E sur tout $E \in Irr(\mathbb{C}\mathcal{L} \rtimes W)$.

Définition (Ordre sur partiel sur $Irr(\mathbb{C}\mathcal{L} \rtimes W)$ et $Irr(N_W(W_0))$)

On définit un ordre partiel sur $Irr(\mathbb{C}\mathcal{L} \rtimes W)$ par $E < F$ si $c_F - c_E \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Les catégories $\mathcal{O}(W_0, W)$ et $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$

Définition

1. *Sous catégorie pleine des $A(W_0, W)$-modules (resp. $A(\mathcal{L}, W)$-modules) de type fini*

Les catégories $\mathcal{O}(W_0, W)$ et $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$

Définition

1. *Sous catégorie pleine des $A(W_0, W)$-modules (resp. $A(\mathcal{L}, W)$-modules) de type fini*
2. *Localement nilpotent pour l'action de $\mathbb{C}[V^*]$*

Les catégories $\mathcal{O}(W_0, W)$ et $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$

Définition

1. *Sous catégorie pleine des $A(W_0, W)$-modules (resp. $A(\mathcal{L}, W)$-modules) de type fini*
2. *Localement nilpotent pour l'action de $\mathbb{C}[V^*]$*
3. $M \simeq \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{C}} \mathcal{W}_\alpha(M)$,
   $\mathcal{W}_\alpha(M) := \{m \in M | \exists n \in \mathbb{N}, (eu_0 - \alpha)^n.m = 0\}$ *(resp. $\bigoplus_{\alpha \in \mathbb{C}}$ $\tilde{eu}$-espace caractéristique)*

Les catégories $\mathcal{O}(W_0, W)$ et $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$

Définition

1. *Sous catégorie pleine des $A(W_0, W)$-modules (resp. $A(\mathcal{L}, W)$-modules) de type fini*
2. *Localement nilpotent pour l'action de $\mathbb{C}[V^*]$*
3. $M \simeq \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{C}} \mathcal{W}_\alpha(M)$,
   $\mathcal{W}_\alpha(M) := \{m \in M | \exists n \in \mathbb{N}, (eu_0 - \alpha)^n.m = 0\}$ *(resp.* $\bigoplus_{\alpha\in\mathbb{C}}$ *ẽu-espace caractéristique)*

La catégorie $\mathcal{O}(W_0, W)$ (resp. $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$) est une sous catégorie de Serre de $A(W_0, W)$-module (resp. $A(\mathcal{L}, W)$-mod).

Les catégories $\mathcal{O}(W_0, W)$ et $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$.

Objet standard

Proposition

- $E \in Irr(\mathbb{C}\mathcal{L} \rtimes W)$, $\Delta(E) := Ind_{(\mathbb{C}[V^*]\otimes\mathbb{C}\mathcal{L})\rtimes W}^{A(\mathcal{L},W)} E$.
  $\Delta(E) \simeq \mathbb{C}[V] \otimes E, ((\mathbb{C}[V] \otimes \mathbb{C}\mathcal{L}) \rtimes W\text{-}mod)$,

Les catégories $\mathcal{O}(W_0, W)$ et $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$.

Objet standard

Proposition

- $E \in Irr(\mathbb{C}\mathcal{L} \rtimes W)$, $\Delta(E) := Ind_{(\mathbb{C}[V^*] \otimes \mathbb{C}\mathcal{L}) \rtimes W}^{A(\mathcal{L}, W)} E$.
  $\Delta(E) \simeq \mathbb{C}[V] \otimes E, ((\mathbb{C}[V] \otimes \mathbb{C}\mathcal{L}) \rtimes W\text{-}mod)$,
- $E \in Irr(N_W(W_0))$, $\Delta(E) := Ind_{\mathbb{C}[V^*] \rtimes N_W(W_0)}^{A(W_0, W)} E$
  $\Delta(E) \simeq \mathbb{C}[V] \otimes E, (\mathbb{C}[V] \rtimes N_W(W_0))\text{-}module$

Les catégories $\mathcal{O}(W_0, W)$ et $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$.

Objet standard

Proposition

- *$E \in Irr(\mathbb{C}\mathcal{L} \rtimes W)$, $\Delta(E) := Ind_{(\mathbb{C}[V^*]\otimes\mathbb{C}\mathcal{L})\rtimes W}^{A(\mathcal{L},W)} E$. $\Delta(E) \simeq \mathbb{C}[V] \otimes E$, $((\mathbb{C}[V] \otimes \mathbb{C}\mathcal{L}) \rtimes W$-mod),*
- *$E \in Irr(N_W(W_0))$, $\Delta(E) := Ind_{\mathbb{C}[V^*]\rtimes N_W(W_0)}^{A(W_0,W)} E$ $\Delta(E) \simeq \mathbb{C}[V] \otimes E$, $(\mathbb{C}[V] \rtimes N_W(W_0))$-module*
- *$\Delta(E)$ admet une tête simple $L(E)$, pour tout $E \in Irr(\mathbb{C}\mathcal{L} \rtimes W)$, (resp. $E \in Irr(N_W(W_0))$)*

Les catégories $\mathcal{O}(W_0, W)$ et $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$.

Objet standard

Proposition

- $E \in Irr(\mathbb{C}\mathcal{L} \rtimes W)$, $\Delta(E) := Ind_{(\mathbb{C}[V^*] \otimes \mathbb{C}\mathcal{L}) \rtimes W}^{A(\mathcal{L}, W)} E$.
  $\Delta(E) \simeq \mathbb{C}[V] \otimes E, ((\mathbb{C}[V] \otimes \mathbb{C}\mathcal{L}) \rtimes W\text{-}mod)$,
- $E \in Irr(N_W(W_0))$, $\Delta(E) := Ind_{\mathbb{C}[V^*] \rtimes N_W(W_0)}^{A(W_0, W)} E$
  $\Delta(E) \simeq \mathbb{C}[V] \otimes E, (\mathbb{C}[V] \rtimes N_W(W_0))\text{-}module$
- $\Delta(E)$ *admet une tête simple* $L(E)$, *pour tout* $E \in Irr(\mathbb{C}\mathcal{L} \rtimes W)$, *(resp.* $E \in Irr(N_W(W_0))$*)*
- $L(E)$ *admet une couverture projective* $P(E)$, *pour tout* $E \in Irr(\mathbb{C}\mathcal{L} \rtimes W)$, *(resp.* $E \in Irr(N_W(W_0))$*).*

Les catégories $\mathcal{O}(W_0, W)$ et $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$

Puisque,

- Les ensembles $Irr(N_W(W_0))$ et $Irr(\mathbb{C}\mathcal{L} \rtimes W)$ sont partiellement ordonnés.

Les catégories $\mathcal{O}(W_0, W)$ et $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$

Puisque,

- Les ensembles $Irr(N_W(W_0))$ et $Irr(\mathbb{C}\mathcal{L} \rtimes W)$ sont partiellement ordonnés.
- L'ensemble $\Lambda := \{L(E) | E \in Irr(N_W(W_0))($ resp. $Irr(\mathbb{C}\mathcal{L} \rtimes W)\}$ est un ensemble complet d'objets simple, non isomorphe de $\mathcal{O}(W_0, W)$ (resp. $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$).

Les catégories $\mathcal{O}(W_0, W)$ et $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$

Puisque,

- Les ensembles $Irr(N_W(W_0))$ et $Irr(\mathbb{C}\mathcal{L} \rtimes W)$ sont partiellement ordonnés.
- L'ensemble $\Lambda := \{L(E) | E \in Irr(N_W(W_0))(\text{ resp. } Irr(\mathbb{C}\mathcal{L} \rtimes W)\}$ est un ensemble complet d'objets simple, non isomorphe de $\mathcal{O}(W_0, W)$ (resp. $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$).
- Il existe une famille d'objets standards $\{\Delta(E) | E \in Irr(N_W(W_0))(\text{ resp. } \in Irr(\mathbb{C}\mathcal{L} \rtimes W))\}$ de $\mathcal{O}(W_0, W)(\mathcal{O}(\mathcal{L}, W))$ avec $\phi_E : \Delta(E) \twoheadrightarrow L(E)$ tel que pour tout facteur de composition $L(F)$ de $Ker(\phi_E)$ satisfait $F < E$

Les catégories $\mathcal{O}(W_0, W)$ et $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$

Puisque,

- Les ensembles $Irr(N_W(W_0))$ et $Irr(\mathbb{C}\mathcal{L} \rtimes W)$ sont partiellement ordonnées.
- L'ensemble $\Lambda := \{L(E) | E \in Irr(N_W(W_0))($ resp. $Irr(\mathbb{C}\mathcal{L} \rtimes W)\}$ est un ensemble complet d'objets simple, non isomorphe de $\mathcal{O}(W_0, W)$ (resp. $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)$).
- Chaque objet $L(E)$ admet une couverture projective $P(E)$. Chaque $P(E)$ admet une filtration standard : $0 = P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n = P(E)$ tel que $\frac{P_n}{P_{n-1}} \simeq \Delta(E)$ et $\frac{P_i}{P_{i-1}} \simeq \Delta(F)$ avec $F > E$

Théorème

Le triplé $(\mathcal{O}(W_0, W), Irr(N_W(W_0)), <)$ *est une catégorie de plus haut poids.*

Théorème

Le triplé $(\mathcal{O}(W_0, W), Irr(N_W(W_0)), <)$ *est une catégorie de plus haut poids.*
Le triplé $(\mathcal{O}(\mathcal{L}, W), Irr(\mathbb{C}\mathcal{L} \rtimes W), <)$ *est une catégorie de plus haut poids.*

Foncteurs KZ_0 et $\widetilde{KZ}$.

But : On cherche à construire deux foncteurs $\mathcal{O}(W_0, W) \to H(W_0, W)\text{-mod}_{f.d}$ et $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W) \to \mathcal{C}(\mathcal{L}, W)\text{-mod}_{f.d}$.

Foncteurs KZ_0 et $\widetilde{KZ}$.

But : On cherche à construire deux foncteurs $\mathcal{O}(W_0, W) \to H(W_0, W)\text{-mod}_{f.d}$ et $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W) \to \mathcal{C}(\mathcal{L}, W)\text{-mod}_{f.d}$.

Définition (foncteur de localisation)

$$\begin{array}{rrcl} Loc: & A(W_0, W)\text{-}mod & \longrightarrow & A(W_0, W)_{reg}\text{-}mod \\ & M & \longmapsto & M_{reg} := A(W_0, W)_{reg} \otimes_{A(W_0, W)} M \end{array}$$

Fonceurs KZ_0 et $\widetilde{KZ}$.

But : On cherche à construire deux foncteurs $\mathcal{O}(W_0, W) \to H(W_0, W)\text{-mod}_{f.d}$ et $\mathcal{O}(\mathcal{L}, W) \to \mathcal{C}(\mathcal{L}, W)\text{-mod}_{f.d}$.

Définition (foncteur de localisation)

$$\begin{array}{rrcl} Loc: & A(W_0, W)\text{-}mod & \longrightarrow & A(W_0, W)_{reg}\text{-}mod \\ & M & \longmapsto & M_{reg} := A(W_0, W)_{reg} \otimes_{A(W_0, W)} M \end{array}$$

$M \in A(W_0, W)$-mod, $M_{tor} := \{m \in M | \exists N > 0,\ \delta^N.m = 0\}$.
$(A(W_0, W)\text{-mod})_{tor} := \{M \in A(W_0, W)\text{-mod} | M_{tor} = M\}$.

Frame Title

$\mathcal{O}(W_0, W)_{tor} := \mathcal{O}(W_0, W) \cap (A(W_0, W)\text{-mod})_{tor}$: sous catégorie de Serre de $A(W_0, W)$-mod.

Frame Title

$\mathcal{O}(W_0, W)_{tor} := \mathcal{O}(W_0, W) \cap (A(W_0, W)\text{-mod})_{tor}$: sous catégorie de Serre de $A(W_0, W)$-mod.

Proposition

Le foncteur de localisation induit un foncteur pleinement fidéle :

$$\frac{\mathcal{O}(W_0, W)}{\mathcal{O}(W_0, W)_{tor}} \to A(W_0, W)_{reg}\text{-}mod$$

Définition (foncteur de localisation)

$$\begin{array}{rccl} Loc: & A(\mathcal{L}, W)\text{-}mod & \longrightarrow & A(\mathcal{L}, W)_{reg}\text{-}mod \\ & M & \longmapsto & M_{reg} := A(\mathcal{L}, W)_{reg} \otimes_{A(\mathcal{L}, W)} M \end{array}$$

$M \in A(\mathcal{L}, W)\text{-mod}$, $M_{tor} := \{m \in M | \exists N > 0,\ \delta^N.m = 0\}$.

Définition (foncteur de localisation)

$$\begin{array}{rrcl} Loc: & A(\mathcal{L}, W)\text{-}mod & \longrightarrow & A(\mathcal{L}, W)_{reg}\text{-}mod \\ & M & \longmapsto & M_{reg} := A(\mathcal{L}, W)_{reg} \otimes_{A(\mathcal{L}, W)} M \end{array}$$

$M \in A(\mathcal{L}, W)\text{-mod}$, $M_{tor} := \{m \in M | \exists N > 0,\ \delta^N.m = 0\}$.
$(A(\mathcal{L}, W)\text{-mod})_{tor} := \{M \in A(\mathcal{L}, W)\text{-mod} | M_{tor} = M\}$.

$\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)_{tor} := \mathcal{O}(\mathcal{L}, W) \cap (A(\mathcal{L}, W)\text{-mod})_{tor}$: sous catégorie de Serre de $A(\mathcal{L}, W)$-mod.

Proposition

Le foncteur de localisation induit un foncteur pleinement fidèle :

$$\frac{\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)}{\mathcal{O}(\mathcal{L}, W)_{tor}} \to A(\mathcal{L}, W)_{reg}\text{-}mod$$

Foncteurs KZ_0 et $\widetilde{KZ}$.

1. Par le plongement de Dunkl, on obtient une équivalence de catégories : $A(W_0, W)_{reg}\text{-mod} \to \mathcal{D}(X) \rtimes N_W(W_0)\text{-mod}$

Foncteurs KZ_0 et $\widetilde{KZ}$.

1. Par le plongement de Dunkl, on obtient une équivalence de catégories : $A(W_0, W)_{reg}$-mod $\to \mathcal{D}(X) \rtimes N_W(W_0)$-mod
2. $\mathcal{D}(X) \rtimes N_W(W_0)$-mod est équivalente à $\mathcal{D}(X)^{N_W(W_0)}$-mod

Foncteurs KZ_0 et $\widetilde{KZ}$.

1. Par le plongement de Dunkl, on obtient une équivalence de catégories : $A(W_0, W)_{reg}$-mod $\to \mathcal{D}(X) \rtimes N_W(W_0)$-mod
2. $\mathcal{D}(X) \rtimes N_W(W_0)$-mod est équivalente à $\mathcal{D}(X)^{N_W(W_0)}$-mod
3. $\mathcal{D}(X)^{N_W(W_0)}? \simeq ?\mathcal{D}(X/N_W(W_0))$

Foncteurs KZ_0 et $\widetilde{KZ}$.

1. Par le plongement de Dunkl, on obtient une équivalence de catégories : $A(W_0, W)_{reg}$-mod $\to \mathcal{D}(X) \rtimes N_W(W_0)$-mod
2. $\mathcal{D}(X) \rtimes N_W(W_0)$-mod est équivalente à $\mathcal{D}(X)^{N_W(W_0)}$-mod
3. $\mathcal{D}(X)^{N_W(W_0)}? \simeq ?\mathcal{D}(X/N_W(W_0))$

Soit k un corps algébriquement clos et de caractéristique 0. Soit A une k-algèbre, de type fini et réduite.
Soit G un groupe fini agissant sur A par automorphismes.

Foncteurs KZ_0 et $\widetilde{KZ}$.

1. Par le plongement de Dunkl, on obtient une équivalence de catégories : $A(W_0, W)_{reg}$-mod $\to \mathcal{D}(X) \rtimes N_W(W_0)$-mod
2. $\mathcal{D}(X) \rtimes N_W(W_0)$-mod est équivalente à $\mathcal{D}(X)^{N_W(W_0)}$-mod
3. $\mathcal{D}(X)^{N_W(W_0)} ? \simeq ? \mathcal{D}(X/N_W(W_0))$

Soit k un corps algébriquement clos et de caractéristique 0. Soit A une k-algèbre, de type fini et réduite.
Soit G un groupe fini agissant sur A par automorphismes.

Théorème (Cannings Holland, 1994)

Si G agit sans point fixe sur $Spec(A)$ alors $\mathcal{D}(A)^G \simeq \mathcal{D}(A^G)$

ALors $\mathcal{D}(X/N_W(W_0)) \simeq \mathcal{D}(X)^{N_W(W_0)}$.

Foncteurs KZ_0 et $\widetilde{KZ}$

1. Structure de $\mathcal{D}(X) \rtimes N_W(W_0)$-module : Sur les objets standards $\Delta(E)_{reg}$, $E \in Irr(N_W(W_0))$.
   T_y^o agit sur $\Delta(E)_{reg}$. Soit $P \otimes v \in \Delta(E)_{reg}$,

$$\nabla_y^o(P \otimes v) := \partial_y P \otimes v + \sum_{H \in \mathcal{A}_0} \frac{\alpha_H(y)}{\alpha_H} \sum_{j=0}^{m_H-1} m_H k_{H,j}(P \otimes \epsilon_{H,j} v)$$

Proposition

∇_y^o est une connexion plate à singularités régulières sur V.

Foncteurs KZ_0 et $\widetilde{KZ}$

1. Structure de $(\mathcal{D}(X) \otimes \mathbb{C}\mathcal{L}) \rtimes W$-module : Sur les objets standards $\Delta(E)_{reg}$, $E \in Irr(\mathbb{C}\mathcal{L} \rtimes W)$.
$\widetilde{T}_y$ agit sur $\Delta(E)_{reg}$. Soit $P \otimes v \in \Delta(E)_{reg}$,

$$\nabla_y(P \otimes v) := \partial_y P \otimes v + \sum_{H \in \mathcal{A}} \frac{\alpha_H(y)}{\alpha_H} \sum_{j=0}^{m_H - 1} m_H k_{H,j}(P \otimes \epsilon_{H,j} v) e_H$$

Proposition

∇_y est une connexion plate à singularités régulières sur V.

Foncteurs KZ_0 et $\widetilde{KZ}$

On peut appliquer l'équivalence de Riemann-Hilbert-Deligne.
On obtient $\frac{\mathcal{O}(W_0,W)}{\mathcal{O}(W_0,W)_{tor}} \to \mathbb{C}\pi_1(X/N_W(W_0))\text{-mod}_{f.d},$

Foncteurs KZ_0 et $\widetilde{KZ}$

On peut appliquer l'équivalence de Riemann-Hilbert-Deligne.
On obtient $\frac{\mathcal{O}(W_0,W)}{\mathcal{O}(W_0,W)_{tor}} \to \mathbb{C}\pi_1(X/N_W(W_0))\text{-mod}_{f.d},$
$M \mapsto (((M_{reg})^{N_W(W_0)})^{an})^{\nabla}$

Foncteurs KZ_0 et $\widetilde{KZ}$

On peut appliquer l'équivalence de Riemann-Hilbert-Deligne.
On obtient $\frac{\mathcal{O}(W_0,W)}{\mathcal{O}(W_0,W)_{tor}} \to \mathbb{C}\pi_1(X/N_W(W_0))\text{-mod}_{f.d}$,
$M \mapsto (((M_{reg})^{N_W(W_0)})^{an})^{\nabla}$
L'action par monodromie $\mathbb{C}\pi_1(X/N_W(W_0))$ factorise à travers $H(W_0, W)$.

Foncteurs KZ_0 et $\widetilde{KZ}$

On peut appliquer l'équivalence de Riemann-Hilbert-Deligne.
On obtient $\frac{\mathcal{O}(W_0,W)}{\mathcal{O}(W_0,W)_{tor}} \to \mathbb{C}\pi_1(X/N_W(W_0))$-mod$_{f.d}$,
$M \mapsto (((M_{reg})^{N_W(W_0)})^{an})^{\nabla}$
L'action par monodromie $\mathbb{C}\pi_1(X/N_W(W_0))$ factorise à travers $H(W_0, W)$.

Théorème

Le foncteur $KZ_0 : \frac{\mathcal{O}(W_0,W)}{\mathcal{O}(W_0,W)_{tor}} \to H(W_0, W)$-mod$_{f.d}$ est une équivalence de catégories.

On peut appliquer l'équivalence de Riemann-Hilbert-Deligne.

On peut appliquer l'équivalence de Riemann-Hilbert-Deligne. On obtient $\frac{\mathcal{O}(\mathcal{L},W)}{\mathcal{O}(\mathcal{L},W)_{tor}} \to \mathbb{C}\pi_1(X/W) \ltimes \mathbb{C}\mathcal{L}\text{-mod}_{f.d}$,

On peut appliquer l'équivalence de Riemann-Hilbert-Deligne. On obtient $\frac{\mathcal{O}(\mathcal{L},W)}{\mathcal{O}(\mathcal{L},W)_{tor}} \to \mathbb{C}\pi_1(X/W) \ltimes \mathbb{C}\mathcal{L}\text{-mod}_{f.d}$,
$M \mapsto (((M_{reg})^W)^{an})^{\nabla}$

On peut appliquer l'équivalence de Riemann-Hilbert-Deligne. On obtient $\frac{\mathcal{O}(\mathcal{L},W)}{\mathcal{O}(\mathcal{L},W)_{tor}} \to \mathbb{C}\pi_1(X/W) \ltimes \mathbb{C}\mathcal{L}\text{-mod}_{f.d}$,
$M \mapsto (((M_{reg})^W)^{an})^{\nabla}$
L'action par monodromie $B(W) \ltimes \mathbb{C}\mathcal{L}$ factorise à travers $\mathcal{C}(\mathcal{L}, W)$.

On peut appliquer l'équivalence de Riemann-Hilbert-Deligne. On obtient $\frac{\mathcal{O}(\mathcal{L},W)}{\mathcal{O}(\mathcal{L},W)_{tor}} \to \mathbb{C}\pi_1(X/W) \ltimes \mathbb{C}\mathcal{L}\text{-mod}_{f.d}$,
$M \mapsto (((M_{reg})^W)^{an})^\nabla$
L'action par monodromie $B(W) \ltimes \mathbb{C}\mathcal{L}$ factorise à travers $\mathcal{C}(\mathcal{L}, W)$.

Théorème

Le foncteur $\widetilde{KZ} : \frac{\mathcal{O}(\mathcal{L},W)}{\mathcal{O}(\mathcal{L},W)_{tor}} \to \mathcal{C}(\mathcal{L}, W)mod_{f.d}$ est une équivalence de catégories.

Merci pour votre attention.