

La retrouvabilité de Jordan de sous-catégories de modules pour les algèbres aimables

Benjamin Dequêne

LaCIM (UQAM), Montréal

Colloque tournant TLAG à Dijon, le 16 Mars 2022

Mon site web : [ici](#)

Ce travail est une partie du travail de ma thèse encadrée par Hugh Thomas.

Plan

① Connaissances de bases

Plan

① Connaissances de bases

Algèbres aimables

Plan

① Connaissances de bases

Algèbres aimables

Représentations / Modules sur une algèbre aimable

Plan

① Connaissances de bases

Algèbres aimables

Représentations / Modules sur une algèbre aimable

② Combinatoire des cordes et des bandes

Plan

① Connaissances de bases

Algèbres aimables

Représentations / Modules sur une algèbre aimable

② Combinatoire des cordes et des bandes

Représentations de corde

Plan

① Connaissances de bases

Algèbres aimables

Représentations / Modules sur une algèbre aimable

② Combinatoire des cordes et des bandes

Représentations de corde

Représentations de bande

Plan

① Connaissances de bases

Algèbres aimables

Représentations / Modules sur une algèbre aimable

② Combinatoire des cordes et des bandes

Représentations de corde

Représentations de bande

Représentations indécomposables

Plan

① Connaissances de bases

Algèbres aimables

Représentations / Modules sur une algèbre aimable

② Combinatoire des cordes et des bandes

Représentations de corde

Représentations de bande

Représentations indécomposables

Structure des morphismes entre les représentations

Plan

① Connaissances de bases

Algèbres aimables

Représentations / Modules sur une algèbre aimable

② Combinatoire des cordes et des bandes

Représentations de corde

Représentations de bande

Représentations indécomposables

Structure des morphismes entre les représentations

③ La retrouvabilité (canonique) de Jordan

Plan

① Connaissances de bases

Algèbres aimables

Représentations / Modules sur une algèbre aimable

② Combinatoire des cordes et des bandes

Représentations de corde

Représentations de bande

Représentations indécomposables

Structure des morphismes entre les représentations

③ La retrouvabilité (canonique) de Jordan

La retrouvabilité de Jordan d'une catégorie

Plan

① Connaissances de bases

Algèbres aimables

Représentations / Modules sur une algèbre aimable

② Combinatoire des cordes et des bandes

Représentations de corde

Représentations de bande

Représentations indécomposables

Structure des morphismes entre les représentations

③ La retrouvabilité (canonique) de Jordan

La retrouvabilité de Jordan d'une catégorie

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Plan

① Connaissances de bases

Algèbres aimables

Représentations / Modules sur une algèbre aimable

② Combinatoire des cordes et des bandes

Représentations de corde

Représentations de bande

Représentations indécomposables

Structure des morphismes entre les représentations

③ La retrouvabilité (canonique) de Jordan

La retrouvabilité de Jordan d'une catégorie

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Une classe de sous-catégories intéressante

Plan

① Connaissances de bases

Algèbres aimables

Représentations / Modules sur une algèbre aimable

② Combinatoire des cordes et des bandes

Représentations de corde

Représentations de bande

Représentations indécomposables

Structure des morphismes entre les représentations

③ La retrouvabilité (canonique) de Jordan

La retrouvabilité de Jordan d'une catégorie

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Une classe de sous-catégories intéressante

④ Résultats principaux / Aller plus loin

Plan

① Connaissances de bases

Algèbres aimables

Représentations / Modules sur une algèbre aimable

② Combinatoire des cordes et des bandes

Représentations de corde

Représentations de bande

Représentations indécomposables

Structure des morphismes entre les représentations

③ La retrouvabilité (canonique) de Jordan

La retrouvabilité de Jordan d'une catégorie

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Une classe de sous-catégories intéressante

④ Résultats principaux / Aller plus loin

Résultats principaux

Plan

① Connaissances de bases

Algèbres aimables

Représentations / Modules sur une algèbre aimable

② Combinatoire des cordes et des bandes

Représentations de corde

Représentations de bande

Représentations indécomposables

Structure des morphismes entre les représentations

③ La retrouvabilité (canonique) de Jordan

La retrouvabilité de Jordan d'une catégorie

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Une classe de sous-catégories intéressante

④ Résultats principaux / Aller plus loin

Résultats principaux

Aller plus loin

Plan

① Connaissances de bases

Algèbres aimables

Représentations / Modules sur une algèbre aimable

② Combinatoire des cordes et des bandes

Représentations de corde

Représentations de bande

Représentations indécomposables

Structure des morphismes entre les représentations

③ La retrouvabilité (canonique) de Jordan

La retrouvabilité de Jordan d'une catégorie

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Une classe de sous-catégories intéressante

④ Résultats principaux / Aller plus loin

Résultats principaux

Aller plus loin

Carquois

Carquois

$$1 \xrightarrow{a} 2$$

$$1 \xrightarrow{a} 2 \begin{array}{c} \circlearrowright \\ b \end{array}$$

$$1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$$

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{c} \\ \xrightarrow{d} \end{array} 3$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 4 & & \\ & & \uparrow & & \\ & b & & & \\ 1 & \xrightarrow{a} & 2 & \xleftarrow{c} & 3 \end{array}$$

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2$$

$$\begin{array}{ccc} & 2 & \\ a \nearrow & & \searrow b \\ 1 & \xleftarrow{c} & 3 \end{array}$$

Carquois

$$1 \xrightarrow{a} 2$$

$$1 \xrightarrow{a} 2 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ b \end{array}$$

$$1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$$

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{c} \\ \xrightarrow{d} \end{array} 3$$

$$1 \xrightarrow{a} 2 \begin{array}{c} \xleftarrow{c} 3 \\ \uparrow b \\ 4 \end{array}$$

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2$$

$$1 \begin{array}{c} \nearrow a \\ \xleftarrow{c} 3 \end{array} 2 \begin{array}{c} \searrow b \end{array}$$

Définition 1

Un *carquois* est la donnée d'un quadruplet $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ où :

Carquois

$$1 \xrightarrow{a} 2$$

$$1 \xrightarrow{a} 2 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ b \end{array}$$

$$1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$$

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{c} \\ \xrightarrow{d} \end{array} 3$$

$$\begin{array}{c} 4 \\ \uparrow b \\ 1 \xrightarrow{a} 2 \xleftarrow{c} 3 \end{array}$$

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2$$

$$\begin{array}{ccc} & 2 & \\ a \nearrow & & \searrow b \\ 1 & \xleftarrow{c} & 3 \end{array}$$

Définition 1

Un *carquois* est la donnée d'un quadruplet $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ où :

- Q_0 est un ensemble (l'ensemble des sommets) ;

Carquois

$$1 \xrightarrow{a} 2$$

$$1 \xrightarrow{a} 2 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ b \end{array}$$

$$1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$$

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{c} \\ \xrightarrow{d} \end{array} 3$$

$$\begin{array}{c} 4 \\ \uparrow b \\ 1 \xrightarrow{a} 2 \xleftarrow{c} 3 \end{array}$$

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2$$

$$\begin{array}{ccc} & 2 & \\ a \nearrow & & \searrow b \\ 1 & \xleftarrow{c} & 3 \end{array}$$

Définition 1

Un *carquois* est la donnée d'un quadruplet $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ où :

- Q_0 est un ensemble (l'ensemble des sommets) ;
- Q_1 est un ensemble (l'ensemble des flèches) ;

Carquois

$$1 \xrightarrow{a} 2$$

$$1 \xrightarrow{a} 2 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ b \end{array}$$

$$1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$$

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{c} \\ \xrightarrow{d} \end{array} 3$$

$$\begin{array}{c} 4 \\ \uparrow b \\ 1 \xrightarrow{a} 2 \xleftarrow{c} 3 \end{array}$$

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2$$

$$\begin{array}{ccc} & 2 & \\ a \nearrow & & \searrow b \\ 1 & \xleftarrow{c} & 3 \end{array}$$

Définition 1

Un *carquois* est la donnée d'un quadruplet $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ où :

- Q_0 est un ensemble (l'ensemble des sommets) ;
- Q_1 est un ensemble (l'ensemble des flèches) ;
- $s, t : Q_1 \longrightarrow Q_0$ deux fonctions tels que pour tout $\alpha \in Q_1$, $s(\alpha)$ désigne la source de α et $t(\alpha)$ le but de α .

Algèbre de chemins

Algèbre de chemins

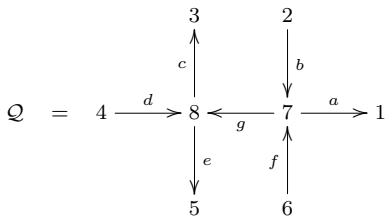
Supposons Q *fini* ($\#Q_0, \#Q_1 < \infty$) et *connexe*.

Soit $\mathbb{K}$ un corps (que nous supposerons *algébriquement clos*).

Algèbre de chemins

Supposons Q *fini* ($\#Q_0, \#Q_1 < \infty$) et *connexe*.

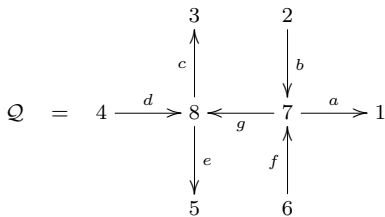
Soit $\mathbb{K}$ un corps (que nous supposerons *algébriquement clos*).



Algèbre de chemins

Supposons Q *fini* ($\#Q_0, \#Q_1 < \infty$) et *connexe*.

Soit $\mathbb{K}$ un corps (que nous supposerons *algébriquement clos*).



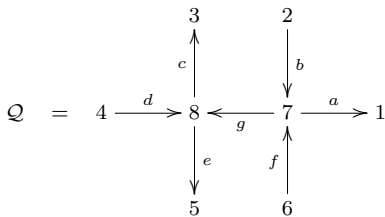
$$\mathbb{K}Q =$$

$$\langle e_1, e_2, \dots, e_8, \dots \rangle$$

Algèbre de chemins

Supposons Q *fini* ($\#Q_0, \#Q_1 < \infty$) et *connexe*.

Soit $\mathbb{K}$ un corps (que nous supposerons *algébriquement clos*).



$$\mathbb{K}Q =$$

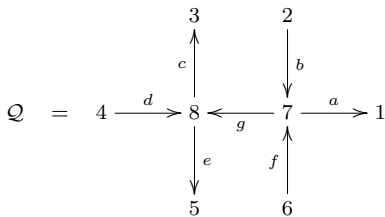
$$\langle e_1, e_2, \dots, e_8,$$

$$a, b, \dots, h,$$

Algèbre de chemins

Supposons Q *fini* ($\#Q_0, \#Q_1 < \infty$) et *connexe*.

Soit $\mathbb{K}$ un corps (que nous supposerons *algébriquement clos*).



$\mathbb{K}Q =$

$\langle e_1, e_2, \dots, e_8,$

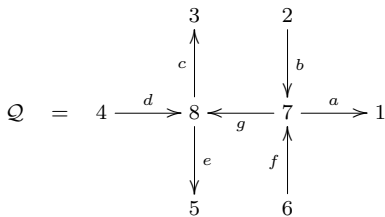
$a, b, \dots, h,$

$cd, ed, eg, cg, gb, gf, ab, af$

Algèbre de chemins

Supposons Q *fini* ($\#Q_0, \#Q_1 < \infty$) et *connexe*.

Soit $\mathbb{K}$ un corps (que nous supposerons *algébriquement clos*).



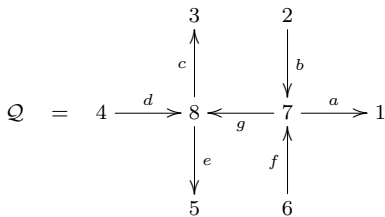
$\mathbb{K}Q =$

$\langle e_1, e_2, \dots, e_8,$
 $a, b, \dots, h,$
 $cd, ed, eg, cg, gb, gf, ab, af$
 $cgb, egb, cgf, egf \rangle$

Algèbre de chemins

Supposons Q *fini* ($\#Q_0, \#Q_1 < \infty$) et *connexe*.

Soit $\mathbb{K}$ un corps (que nous supposerons *algébriquement clos*).



$$\mathbb{K}Q =$$

$$\langle e_1, e_2, \dots, e_8,$$

$$a, b, \dots, h,$$

$$cd, ed, eg, cg, gb, gf, ab, af$$

$$cgb, egb, cgf, egf \rangle$$

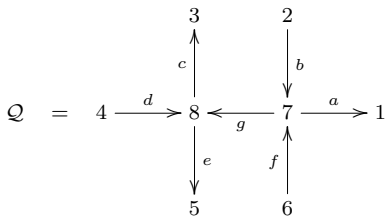
Définition 2

L'*algèbre des chemins* de Q est le $\mathbb{K}$ —espace vectoriel engendré par tous les chemins du carquois Q muni de la multiplication $\cdot$ correspondant à la concaténation :

Algèbre de chemins

Supposons Q *fini* ($\#Q_0, \#Q_1 < \infty$) et *connexe*.

Soit $\mathbb{K}$ un corps (que nous supposerons *algébriquement clos*).



$$\mathbb{K}Q =$$

$$\begin{aligned} &\langle e_1, e_2, \dots, e_8, \\ &a, b, \dots, h, \\ &cd, ed, eg, cg, gb, gf, ab, af \\ &cgb, egb, cgf, egf \rangle \end{aligned}$$

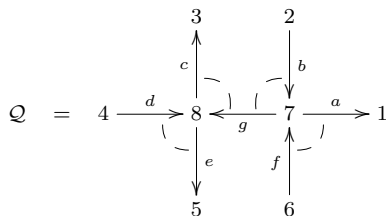
Définition 2

L'*algèbre des chemins* de Q est le $\mathbb{K}$ –espace vectoriel engendré par tous les chemins du carquois Q muni de la multiplication $\cdot$ correspondant à la concaténation :

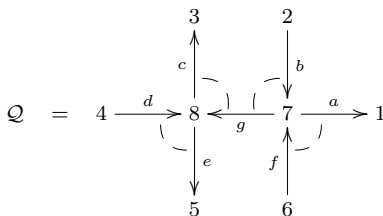
$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = \begin{cases} \gamma_1 \gamma_2 & \text{si } s(\gamma_1) = t(\gamma_2) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Algèbre aimable

Algèbre aimable

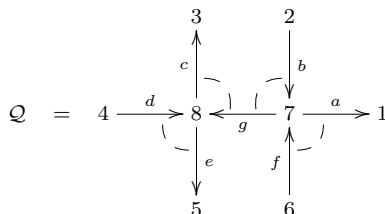


Algèbre aimable



$$I = \langle cg, ed, gb, af \rangle$$

Algèbre aimable

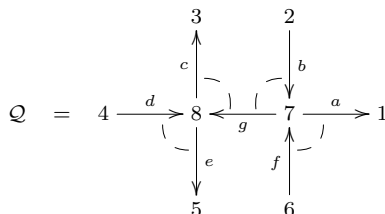


$$I = \langle cg, ed, gb, af \rangle$$

$$\mathbb{K}Q/I =$$

$$\langle e_1, e_2, \dots, e_8, \dots \rangle$$

Algèbre aimable

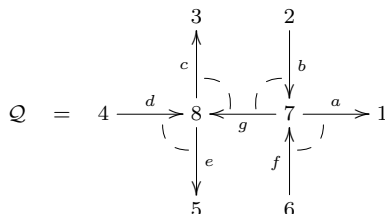


$$I = \langle cg, ed, gb, af \rangle$$

$$\mathbb{K}Q/I =$$

$$\langle e_1, e_2, \dots, e_8, \\ a, b, \dots, h, \rangle$$

Algèbre aimable



$$I = \langle cg, ed, gb, af \rangle$$

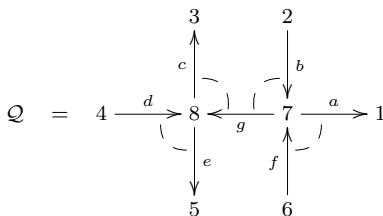
$$\mathbb{K}Q/I =$$

$$\langle e_1, e_2, \dots, e_8,$$

$$a, b, \dots, h,$$

$$cd, \cancel{ed}, eg, \cancel{fg}, gf, ab, \cancel{af}$$

Algèbre aimable



$$I = \langle cg, ed, gb, af \rangle$$

$$\mathbb{K}Q/I =$$

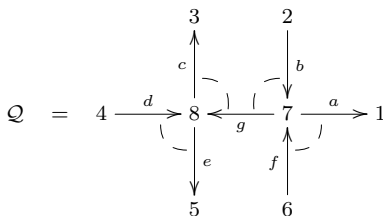
$$\langle e_1, e_2, \dots, e_8,$$

$$a, b, \dots, h,$$

$$cd, \cancel{ed}, eg, \cancel{eg}, \cancel{gb}, gf, ab, \cancel{af}$$

$$\cancel{cg}, \cancel{eg}, \cancel{cf}, egf \rangle$$

Algèbre aimable



$$I = \langle cg, ed, gb, af \rangle$$

$$\mathbb{K}Q/I =$$

$$\langle e_1, e_2, \dots, e_8,$$

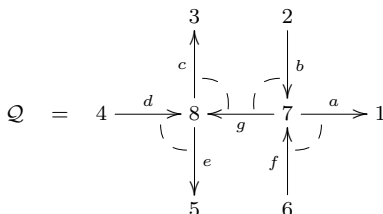
$$a, b, \dots, h,$$

$$cd, \cancel{ed}, eg, \cancel{gb}, gf, ab, \cancel{af}$$

$$\cancel{cgb}, \cancel{egb}, \cancel{cgb}, egf \rangle$$

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}Q_{\geq n} = \langle \text{chemins } \gamma \text{ de longueur } \geq n \rangle$.

Algèbre aimable



$$I = \langle cg, ed, gb, af \rangle$$

$$\mathbb{K}Q/I =$$

$$\langle e_1, e_2, \dots, e_8,$$

$$a, b, \dots, h,$$

$$cd, \cancel{ed}, eg, \cancel{gb}, gf, ab, \cancel{af}$$

$$\cancel{cgb}, \cancel{egb}, \cancel{cgb}, egf \rangle$$

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}Q_{\geq n} = \langle \text{chemins } \gamma \text{ de longueur } \geq n \rangle$.

Définition 2

Un idéal I est dit *admissible* si et seulement si $\exists N \geq 2 / \mathbb{K}Q_{\geq N} \subseteq I \subseteq \mathbb{K}Q_{\geq 2}$

Algèbre aimable

Algèbre aimable

Définition 3

Une *algèbre aimable* est une algèbre quotient $A = \mathbb{K}Q/I$ telle que :

Algèbre aimable

Définition 3

Une *algèbre aimable* est une algèbre quotient $A = \mathbb{K}Q/I$ telle que :

- $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ est un carquois telle qu'en chaque sommet $q \in Q_0$ il y a au plus deux flèches entrantes et au plus deux flèches sortantes.



Algèbre aimable

Définition 3

Une *algèbre aimable* est une algèbre quotient $A = \mathbb{K}Q/I$ telle que :

- $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ est un carquois telle qu'en chaque sommet $q \in Q_0$ il y a au plus deux flèches entrantes et au plus deux flèches sortantes.



- I est un idéal admissible engendré par des chemins de longueur 2 tels que pour toute flèche $\alpha \in Q_1$ il existe :

Algèbre aimable

Définition 3

Une *algèbre aimable* est une algèbre quotient $A = \mathbb{K}Q/I$ telle que :

- $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ est un carquois telle qu'en chaque sommet $q \in Q_0$ il y a au plus deux flèches entrantes et au plus deux flèches sortantes.



- I est un idéal admissible engendré par des chemins de longueur 2 tels que pour toute flèche $\alpha \in Q_1$ il existe :
 - au plus une flèche β telle que $s(\alpha) = t(\beta)$ et $\alpha\beta \in I$

Algèbre aimable

Définition 3

Une *algèbre aimable* est une algèbre quotient $A = \mathbb{K}Q/I$ telle que :

- $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ est un carquois telle qu'en chaque sommet $q \in Q_0$ il y a au plus deux flèches entrantes et au plus deux flèches sortantes.



- I est un idéal admissible engendré par des chemins de longueur 2 tels que pour toute flèche $\alpha \in Q_1$ il existe :
 - au plus une flèche β telle que $s(\alpha) = t(\beta)$ et $\alpha\beta \in I$
 - au plus une flèche γ telle que $s(\gamma) = t(\alpha)$ et $\gamma\alpha \in I$

Algèbre aimable

Définition 3

Une *algèbre aimable* est une algèbre quotient $A = \mathbb{K}Q/I$ telle que :

- $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ est un carquois telle qu'en chaque sommet $q \in Q_0$ il y a au plus deux flèches entrantes et au plus deux flèches sortantes.



- I est un idéal admissible engendré par des chemins de longueur 2 tels que pour toute flèche $\alpha \in Q_1$ il existe :
 - au plus une flèche β telle que $s(\alpha) = t(\beta)$ et $\alpha\beta \in I$
 - au plus une flèche γ telle que $s(\gamma) = t(\alpha)$ et $\gamma\alpha \in I$
 - au plus une flèche β' telle que $s(\alpha) = t(\beta')$ et $\alpha\beta' \notin I$

Algèbre aimable

Définition 3

Une *algèbre aimable* est une algèbre quotient $A = \mathbb{K}Q/I$ telle que :

- $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ est un carquois telle qu'en chaque sommet $q \in Q_0$ il y a au plus deux flèches entrantes et au plus deux flèches sortantes.



- I est un idéal admissible engendré par des chemins de longueur 2 tels que pour toute flèche $\alpha \in Q_1$ il existe :
 - au plus une flèche β telle que $s(\alpha) = t(\beta)$ et $\alpha\beta \in I$
 - au plus une flèche γ telle que $s(\gamma) = t(\alpha)$ et $\gamma\alpha \in I$
 - au plus une flèche β' telle que $s(\alpha) = t(\beta')$ et $\alpha\beta' \notin I$
 - au plus une flèche γ' telle que $s(\gamma') = t(\alpha)$ et $\gamma'\alpha \notin I$.

Algèbre aimable

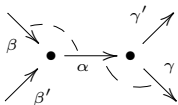
Définition 3

Une *algèbre aimable* est une algèbre quotient $A = \mathbb{K}Q/I$ telle que :

- $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ est un carquois telle qu'en chaque sommet $q \in Q_0$ il y a au plus deux flèches entrantes et au plus deux flèches sortantes.



- I est un idéal admissible engendré par des chemins de longueur 2 tels que pour toute flèche $\alpha \in Q_1$ il existe :
 - au plus une flèche β telle que $s(\alpha) = t(\beta)$ et $\alpha\beta \in I$
 - au plus une flèche γ telle que $s(\gamma) = t(\alpha)$ et $\gamma\alpha \in I$
 - au plus une flèche β' telle que $s(\alpha) = t(\beta')$ et $\alpha\beta' \notin I$
 - au plus une flèche γ' telle que $s(\gamma') = t(\alpha)$ et $\gamma'\alpha \notin I$.



Algèbre aimable

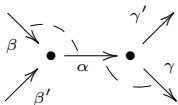
Définition 3

Une *algèbre aimable* est une algèbre quotient $A = \mathbb{K}Q/I$ telle que :

- $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ est un carquois telle qu'en chaque sommet $q \in Q_0$ il y a au plus deux flèches entrantes et au plus deux flèches sortantes.



- I est un idéal admissible engendré par des chemins de longueur 2 tels que pour toute flèche $\alpha \in Q_1$ il existe :
 - au plus une flèche β telle que $s(\alpha) = t(\beta)$ et $\alpha\beta \in I$
 - au plus une flèche γ telle que $s(\gamma) = t(\alpha)$ et $\gamma\alpha \in I$
 - au plus une flèche β' telle que $s(\alpha) = t(\beta')$ et $\alpha\beta' \notin I$
 - au plus une flèche γ' telle que $s(\gamma') = t(\alpha)$ et $\gamma'\alpha \notin I$.



Par un abus, nous appellerons carquois *aimable* $Q = (Q, I)$ est un carquois Q muni d'un idéal I tel que $\mathbb{K}Q := \mathbb{K}Q/I$ est aimable.

Plan

① Connaissances de bases

Algèbres aimables

Représentations / Modules sur une algèbre aimable

② Combinatoire des cordes et des bandes

Représentations de corde

Représentations de bande

Représentations indécomposables

Structure des morphismes entre les représentations

③ La retrouvabilité (canonique) de Jordan

La retrouvabilité de Jordan d'une catégorie

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Une classe de sous-catégories intéressante

④ Résultats principaux / Aller plus loin

Résultats principaux

Aller plus loin

Représentations

Représentations

Soit $\mathbb{K}$ un corps (algébriquement clos) et $\mathcal{Q} = (Q, I)$ un carquois aimable.

Représentations

Soit $\mathbb{K}$ un corps (algébriquement clos) et $\mathcal{Q} = (Q, I)$ un carquois aimable.

$$\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

Représentations

Soit $\mathbb{K}$ un corps (algébriquement clos) et $\mathcal{Q} = (Q, I)$ un carquois aimable.

$$\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{[0 \ 0 \ 1]} \mathbb{K}$$

Représentations

Soit $\mathbb{K}$ un corps (algébriquement clos) et $\mathcal{Q} = (Q, I)$ un carquois aimable.

$$\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}]{\quad} \mathbb{K}^3 \xrightarrow[0 \ 0 \ 1]{\quad} \mathbb{K}$$

Définition 4

Une *représentation* de $\mathcal{Q}$ est la donnée $X = ((X_q)_{q \in Q_0}, (X_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ telle que :

Représentations

Soit $\mathbb{K}$ un corps (algébriquement clos) et $\mathcal{Q} = (Q, I)$ un carquois aimable.

$$\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}]{\quad} \mathbb{K}^3 \xrightarrow[0 \ 0 \ 1]{\quad} \mathbb{K}$$

Définition 4

Une *représentation* de $\mathcal{Q}$ est la donnée $X = ((X_q)_{q \in Q_0}, (X_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ telle que :

- X_q est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension fini pour tout $q \in Q_0$;

Représentations

Soit $\mathbb{K}$ un corps (algébriquement clos) et $\mathcal{Q} = (Q, I)$ un carquois aimable.

$$\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}]{\quad} \mathbb{K}^3 \xrightarrow[0 \ 0 \ 1]{\quad} \mathbb{K}$$

Définition 4

Une *représentation* de $\mathcal{Q}$ est la donnée $X = ((X_q)_{q \in Q_0}, (X_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ telle que :

- X_q est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension fini pour tout $q \in Q_0$;
- $X_\alpha : X_{s(\alpha)} \longrightarrow X_{t(\alpha)}$ est une application $\mathbb{K}$ -linéaire pour tout $\alpha \in Q_1$;

Représentations

Soit $\mathbb{K}$ un corps (algébriquement clos) et $\mathcal{Q} = (Q, I)$ un carquois aimable.

$$\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}]{\quad} \mathbb{K}^3 \xrightarrow[0 \ 0 \ 1]{\quad} \mathbb{K}$$

Définition 4

Une *représentation* de $\mathcal{Q}$ est la donnée $X = ((X_q)_{q \in Q_0}, (X_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ telle que :

- X_q est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension fini pour tout $q \in Q_0$;
- $X_\alpha : X_{s(\alpha)} \longrightarrow X_{t(\alpha)}$ est une application $\mathbb{K}$ -linéaire pour tout $\alpha \in Q_1$;
- Si $\alpha\beta \in I$, alors $X_\alpha X_\beta = 0$.

Représentations

Soit $\mathbb{K}$ un corps (algébriquement clos) et $\mathcal{Q} = (Q, I)$ un carquois aimable.

$$\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$$

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{[0 \ 0 \ 1]} \mathbb{K}$$

Définition 4

Une *représentation* de $\mathcal{Q}$ est la donnée $X = ((X_q)_{q \in Q_0}, (X_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ telle que :

- X_q est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension fini pour tout $q \in Q_0$;
- $X_\alpha : X_{s(\alpha)} \longrightarrow X_{t(\alpha)}$ est une application $\mathbb{K}$ -linéaire pour tout $\alpha \in Q_1$;
- Si $\alpha\beta \in I$, alors $X_\alpha X_\beta = 0$.

Nous noterons $\underline{\dim}(X) = (\dim X_q)_{q \in Q_0}$ son *vecteur dimension*.

Morphisme de représentations

Morphisme de représentations

$$\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

Morphisme de représentations

$$Q = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}]{\quad} \mathbb{K}^3 \xrightarrow[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}]{\quad} \mathbb{K}$$

$$Y = \mathbb{K}^2 \xrightarrow[\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}]{\quad} \mathbb{K} \xrightarrow[0]{\quad} \mathbb{K}^2$$

Morphisme de représentations

$$Q = 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$$

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K}$$

$$Y = \mathbb{K}^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K} \xrightarrow{0} \mathbb{K}^2$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} & \mathbb{K}^3 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} & \mathbb{K} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \downarrow & & \downarrow & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \downarrow 0 \\ \mathbb{K}^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} & \mathbb{K} & \xrightarrow{0} & \mathbb{K}^2 \end{array}$$

Morphisme de représentations

$$\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$$

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K}$$

$$Y = \mathbb{K}^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K} \xrightarrow{0} \mathbb{K}^2$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} & \mathbb{K}^3 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} & \mathbb{K} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \downarrow & & \downarrow & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \downarrow 0 \\ \mathbb{K}^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} & \mathbb{K} & \xrightarrow{0} & \mathbb{K}^2 \end{array}$$

Définition 5

Soit X et Y deux représentations de $\mathcal{Q}$. Un *morphisme de représentations* $\phi : X \rightarrow Y$ est une collection $(\phi_q)_{q \in \mathcal{Q}_0}$ d'applications linéaires $\phi_q : X_q \rightarrow Y_q$ telles que

$$\forall \alpha \in \mathcal{Q}_1, \phi_{t(\alpha)} X_\alpha = Y_\alpha \phi_{s(\alpha)}.$$

Morphisme de représentations

Définition 5 (suite)

Morphisme de représentations

Définition 5 (suite)

$$\begin{array}{ccc}
 X_{s(\alpha)} & \xrightarrow{X_\alpha} & X_{t(\alpha)} \\
 \vdots \downarrow \phi_{s(\alpha)} & \circlearrowleft & \downarrow \phi_{t(\alpha)} \\
 Y_{s(\alpha)} & \xrightarrow{Y_\alpha} & Y_{t(\alpha)}
 \end{array}$$

Morphisme de représentations

Définition 5 (suite)

$$\begin{array}{ccc}
 X_{s(\alpha)} & \xrightarrow{X_\alpha} & X_{t(\alpha)} \\
 \vdots \downarrow \phi_{s(\alpha)} & \circlearrowleft & \vdots \downarrow \phi_{t(\alpha)} \\
 Y_{s(\alpha)} & \xrightarrow{Y_\alpha} & Y_{t(\alpha)}
 \end{array}$$

Un morphisme de représentations $\phi : X \longrightarrow Y$ est :

Morphisme de représentations

Définition 5 (suite)

$$\begin{array}{ccc}
 X_{s(\alpha)} & \xrightarrow{X_\alpha} & X_{t(\alpha)} \\
 \vdots \phi_{s(\alpha)} \circlearrowleft & & \vdots \phi_{t(\alpha)} \\
 Y_{s(\alpha)} & \xrightarrow{Y_\alpha} & Y_{t(\alpha)}
 \end{array}$$

Un morphisme de représentations $\phi : X \longrightarrow Y$ est :

- un *isomorphisme* si ϕ_q est un isomorphisme pour tout $q \in Q_0$;

Morphisme de représentations

Définition 5 (suite)

$$\begin{array}{ccc}
 X_{s(\alpha)} & \xrightarrow{X_\alpha} & X_{t(\alpha)} \\
 \vdots \phi_{s(\alpha)} \circlearrowleft & & \vdots \phi_{t(\alpha)} \\
 Y_{s(\alpha)} & \xrightarrow{Y_\alpha} & Y_{t(\alpha)}
 \end{array}$$

Un morphisme de représentations $\phi : X \longrightarrow Y$ est :

- un *isomorphisme* si ϕ_q est un isomorphisme pour tout $q \in Q_0$;
- *nilpotent* (pour $X = Y$) si ϕ_q est nilpotent pour tout $q \in Q_0$.

Morphisme de représentations

Définition 5 (suite)

$$\begin{array}{ccc}
 X_{s(\alpha)} & \xrightarrow{X_\alpha} & X_{t(\alpha)} \\
 \vdots \phi_{s(\alpha)} \circlearrowleft & & \vdots \phi_{t(\alpha)} \\
 Y_{s(\alpha)} & \xrightarrow{Y_\alpha} & Y_{t(\alpha)}
 \end{array}$$

Un morphisme de représentations $\phi : X \longrightarrow Y$ est :

- un *isomorphisme* si ϕ_q est un isomorphisme pour tout $q \in Q_0$;
- *nilpotent* (pour $X = Y$) si ϕ_q est nilpotent pour tout $q \in Q_0$.

Nous dirons que X est *isomorphe* à Y ($X \cong Y$) s'il existe un isomorphisme entre X et Y .

Représentations / Modules

Représentations / Modules

$$Q = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

Représentations / Modules

$$Q = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

Représentations / Modules

$$\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

Représentations sur $\mathcal{Q}$

Représentations / Modules

$$Q = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

Représentations sur Q

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}]{\quad} \mathbb{K}^3 \xrightarrow[0 \ 0 \ 1]{\quad} \mathbb{K}$$

Représentations / Modules

$$Q = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

Représentations sur Q

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}]{\quad} \mathbb{K}^3 \xrightarrow[0 \ 0 \ 1]{\quad} \mathbb{K}$$

$$x \xrightarrow{X_a} y_1$$

$$y_2$$

$$y_3 \xrightarrow{X_b} z$$

Représentations / Modules

$$Q = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

Représentations sur Q

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}]{\quad} \mathbb{K}^3 \xrightarrow[0 \ 0 \ 1]{\quad} \mathbb{K}$$

$$x \xrightarrow{X_a} y_1$$

$$y_2$$

$$y_3 \xrightarrow{X_b} z$$

 $\mathbb{K}Q$ -modules

Représentations / Modules

$$Q = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

Représentations sur Q

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}]{\quad} \mathbb{K}^3 \xrightarrow[0 \ 0 \ 1]{\quad} \mathbb{K}$$

$$x \xrightarrow{X_a} y_1$$

$$y_2$$

$$y_3 \xrightarrow{X_b} z$$

 $\mathbb{K}Q$ -modules

$$M = \langle x, y_1, y_2, y_3, z \rangle$$

Représentations / Modules

$$Q = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

Représentations sur Q

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}]{\quad} \mathbb{K}^3 \xrightarrow[0 \ 0 \ 1]{\quad} \mathbb{K}$$

$$x \xrightarrow{X_a} y_1$$

$$y_2$$

$$y_3 \xrightarrow{X_b} z$$

 $\mathbb{K}Q$ -modules

$$M = \langle x, y_1, y_2, y_3, z \rangle$$

$$\bullet e_1 x = x, ax = y_1,$$

Représentations / Modules

$$Q = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

Représentations sur Q

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}]{\quad} \mathbb{K}^3 \xrightarrow[0 \ 0 \ 1]{\quad} \mathbb{K}$$

$$x \xrightarrow{X_a} y_1$$

$$y_2$$

$$y_3 \xrightarrow{X_b} z$$

 $\mathbb{K}Q$ -modules

$$M = \langle x, y_1, y_2, y_3, z \rangle$$

- $e_1 x = x$, $a x = y_1$,
- $e_2 y_i = y_i$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$,

Représentations / Modules

$$Q = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

Représentations sur Q

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}]{\quad} \mathbb{K}^3 \xrightarrow[0 \ 0 \ 1]{\quad} \mathbb{K}$$

$$x \xrightarrow{X_a} y_1$$

$$y_2$$

$$y_3 \xrightarrow{X_b} z$$

 $\mathbb{K}Q$ -modules

$$M = \langle x, y_1, y_2, y_3, z \rangle$$

- $e_1 x = x$, $a x = y_1$,
- $e_2 y_i = y_i$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$,
- $b y_3 = z$, $e_3 z = z$,

Représentations / Modules

$$Q = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

Représentations sur Q

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}]{\quad} \mathbb{K}^3 \xrightarrow[0 \ 0 \ 1]{\quad} \mathbb{K}$$

$$x \xrightarrow{X_a} y_1$$

$$y_2$$

$$y_3 \xrightarrow{X_b} z$$

 $\mathbb{K}Q$ -modules

$$M = \langle x, y_1, y_2, y_3, z \rangle$$

- $e_1 x = x$, $a x = y_1$,
- $e_2 y_i = y_i$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$,
- $b y_3 = z$, $e_3 z = z$,
- $e_2 x = e_3 x = b x = b a x = 0$,

Représentations / Modules

$$Q = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

Représentations sur Q

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}]{\quad} \mathbb{K}^3 \xrightarrow[0 \ 0 \ 1]{\quad} \mathbb{K}$$

$$x \xrightarrow{X_a} y_1$$

$$y_2$$

$$y_3 \xrightarrow{X_b} z$$

 $\mathbb{K}Q$ -modules

$$M = \langle x, y_1, y_2, y_3, z \rangle$$

- $e_1x = x$, $ax = y_1$,
- $e_2y_i = y_i$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$,
- $by_3 = z$, $e_3z = z$,
- $e_2x = e_3x = bx = bax = 0$,
- $ay_i = e_1y_i = e_3y_i = bay_i = 0$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$

Représentations / Modules

$$Q = 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$$

Représentations sur Q

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{[0 \ 0 \ 1]} \mathbb{K}$$

$$x \xrightarrow{X_a} y_1$$

$$y_2$$

$$y_3 \xrightarrow{X_b} z$$

 $\mathbb{K}Q$ -modules

$$M = \langle x, y_1, y_2, y_3, z \rangle$$

- $e_1 x = x$, $a x = y_1$,
- $e_2 y_i = y_i$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$,
- $b y_3 = z$, $e_3 z = z$,
- $e_2 x = e_3 x = b x = b a x = 0$,
- $a y_i = e_1 y_i = e_3 y_i = b a y_i = 0$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$
- $b y_1 = b y_2 = 0$,

Représentations / Modules

$$\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

Représentations sur $\mathcal{Q}$

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}]{\quad} \mathbb{K}^3 \xrightarrow[0 \ 0 \ 1]{\quad} \mathbb{K}$$

$$x \xrightarrow{X_a} y_1$$

$$y_2$$

$$y_3 \xrightarrow{X_b} z$$

 $\mathbb{K}\mathcal{Q}$ -modules

$$M = \langle x, y_1, y_2, y_3, z \rangle$$

- $e_1x = x$, $ax = y_1$,
- $e_2y_i = y_i$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$,
- $by_3 = z$, $e_3z = z$,
- $e_2x = e_3x = bx = bax = 0$,
- $ay_i = e_1y_i = e_3y_i = bay_i = 0$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$
- $by_1 = by_2 = 0$,
- $e_1z = e_2z = az = bz = baz = 0$

Représentations / Modules

Représentations / Modules

Notons :

Représentations / Modules

Notons :

- $\text{rep}(\mathcal{Q})$ la catégorie des représentation sur $\mathcal{Q}$;

Représentations / Modules

Notons :

- $\text{rep}(\mathcal{Q})$ la catégorie des représentation sur $\mathcal{Q}$;
- $\text{mod}(\mathbb{K}\mathcal{Q})$ la catégorie des $\mathbb{K}\mathcal{Q}$ (ici à gauche).

Représentations / Modules

Notons :

- $\text{rep}(\mathcal{Q})$ la catégorie des représentation sur $\mathcal{Q}$;
- $\text{mod}(\mathbb{K}\mathcal{Q})$ la catégorie des $\mathbb{K}\mathcal{Q}$ (ici à gauche).

Théorème 6

Il y a une équivalence de catégories entre $\text{rep}(\mathcal{Q})$ et $\text{mod}(\mathbb{K}\mathcal{Q})$

Somme direct et représentations indécomposables

Somme direct et représentations indécomposables

$$Q = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

Somme direct et représentations indécomposables

$$Q = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

$$X(1) = \mathbb{K} \xrightarrow[1]{\quad} \mathbb{K} \longrightarrow 0$$

$$X(2) = 0 \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow 0$$

$$X(3) = 0 \longrightarrow \mathbb{K} \xrightarrow[1]{\quad} \mathbb{K}$$

Somme direct et représentations indécomposables

$$Q = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

$$X(1) = \mathbb{K} \xrightarrow[1]{\quad} \mathbb{K} \longrightarrow 0$$

 $\oplus$

$$X(2) = 0 \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow 0$$

 $\oplus$

$$X(3) = 0 \longrightarrow \mathbb{K} \xrightarrow[1]{\quad} \mathbb{K}$$

Somme direct et représentations indécomposables

$$Q = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

$$X(1) = \mathbb{K} \xrightarrow[1]{\quad} \mathbb{K} \longrightarrow 0$$

 $\oplus$

$$X(2) = 0 \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow 0$$

 $\oplus$

$$X(3) = 0 \longrightarrow \mathbb{K} \xrightarrow[1]{\quad} \mathbb{K}$$

$$X(1) \oplus X(2) \oplus X(3) = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K}$$

Somme direct et représentations indécomposables

Somme direct et représentations indécomposables

Définition 7

Soit X, Y deux représentations de $\mathcal{Q}$. La *somme directe* $Z = X \oplus Y$ est la représentation définie par :

Somme direct et représentations indécomposables

Définition 7

Soit X, Y deux représentations de $\mathcal{Q}$. La *somme directe* $Z = X \oplus Y$ est la représentation définie par :

- $Z_q = X_q \oplus Y_q$ pour tout $q \in Q_0$;

Définition 7

- $Z_q = X_q \oplus Y_q$ pour tout $q \in Q_0$;
- $Z_\alpha(x + y) = X_\alpha(x) + Y_\alpha(y)$ pour tout $\alpha \in Q_1$, $x \in X_{s(\alpha)}$ et $y \in Y_{s(\alpha)}$

$$\ll Z_\alpha = \begin{bmatrix} X_\alpha & 0 \\ 0 & Y_\alpha \end{bmatrix} \gg$$

Soit X, Y deux représentations de $\mathcal{Q}$. La *somme directe* $Z = X \oplus Y$ est la représentation définie par :

- $Z_q = X_q \oplus Y_q$ pour tout $q \in Q_0$;
- $Z_\alpha(x + y) = X_\alpha(x) + Y_\alpha(y)$ pour tout $\alpha \in Q_1$, $x \in X_{s(\alpha)}$ et $y \in Y_{s(\alpha)}$

$$\ll Z_\alpha = \begin{bmatrix} X_\alpha & 0 \\ 0 & Y_\alpha \end{bmatrix} \gg$$

Une représentation $Z \neq 0$ est dite *indécomposable* si :

Somme direct et représentations indécomposables

Définition 7

Soit X, Y deux représentations de $\mathcal{Q}$. La *somme directe* $Z = X \oplus Y$ est la représentation définie par :

- $Z_q = X_q \oplus Y_q$ pour tout $q \in Q_0$;
- $Z_\alpha(x + y) = X_\alpha(x) + Y_\alpha(y)$ pour tout $\alpha \in Q_1$, $x \in X_{s(\alpha)}$ et $y \in Y_{s(\alpha)}$

$$\ll Z_\alpha = \begin{bmatrix} X_\alpha & 0 \\ 0 & Y_\alpha \end{bmatrix} \gg$$

Définition 8

Une représentation $Z \neq 0$ est dite *indécomposable* si :

$$Z \cong X \oplus Y \implies Z \cong X \text{ ou } Z \cong Y$$

Somme direct et représentations indécomposables

Définition 7

Soit X, Y deux représentations de $\mathcal{Q}$. La *somme directe* $Z = X \oplus Y$ est la représentation définie par :

- $Z_q = X_q \oplus Y_q$ pour tout $q \in Q_0$;
- $Z_\alpha(x + y) = X_\alpha(x) + Y_\alpha(y)$ pour tout $\alpha \in Q_1$, $x \in X_{s(\alpha)}$ et $y \in Y_{s(\alpha)}$

$$\ll Z_\alpha = \begin{bmatrix} X_\alpha & 0 \\ 0 & Y_\alpha \end{bmatrix} \gg$$

Définition 8

Une représentation $Z \neq 0$ est dite *indécomposable* si :

$$Z \cong X \oplus Y \implies Z \cong X \text{ ou } Z \cong Y$$

$$X(1) = \mathbb{K} \xrightarrow[1]{\curvearrowright} \mathbb{K} \xrightarrow{\searrow} 0, \quad X(2) = 0 \xrightarrow{\curvearrowright} \mathbb{K} \xrightarrow{\searrow} 0 \quad \text{et} \quad X(3) = 0 \xrightarrow{\curvearrowright} \mathbb{K} \xrightarrow[1]{\searrow} \mathbb{K}$$

sont indécomposables.

Plan

① Connaissances de bases

Algèbres aimables

Représentations / Modules sur une algèbre aimable

② Combinatoire des cordes et des bandes

Représentations de corde

Représentations de bande

Représentations indécomposables

Structure des morphismes entre les représentations

③ La retrouvabilité (canonique) de Jordan

La retrouvabilité de Jordan d'une catégorie

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Une classe de sous-catégories intéressante

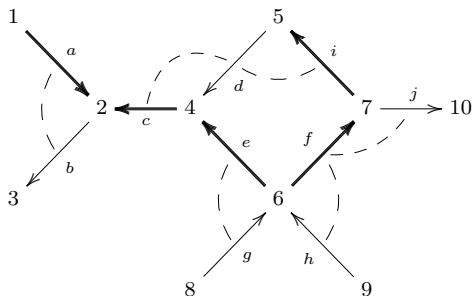
④ Résultats principaux / Aller plus loin

Résultats principaux

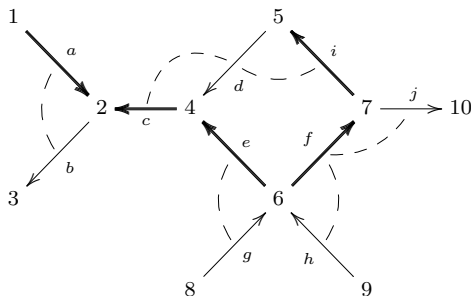
Aller plus loin

Cordes

Cordes

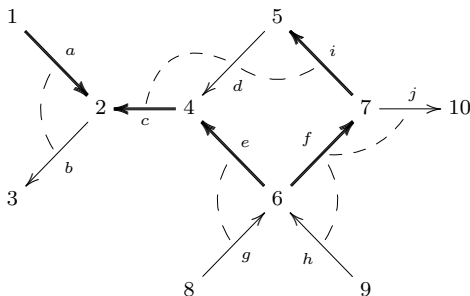


Cordes



En suivant les flèches en gras, nous lisons $\rho = ife^{-1}c^{-1}a$ ou $a^{-1}cef^{-1}i^{-1} = \rho^{-1}$.

Cordes



En suivant les flèches en gras, nous lisons $\rho = ife^{-1}c^{-1}a$ ou $a^{-1}cef^{-1}i^{-1} = \rho^{-1}$.
Cet objet est une *corde* de $\mathcal{Q}$.

Cordes

Cordes

Définition 9

Soit $\mathcal{Q}$ un carquois aimable. Une *corde* de $\mathcal{Q}$ est une suite finie $\rho = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ avec $\alpha_i \in \mathcal{Q}_1$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ et $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, telle que :

Cordes

Définition 9

Soit $\mathcal{Q}$ un carquois aimable. Une **corde** de $\mathcal{Q}$ est une suite finie $\rho = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ avec $\alpha_i \in Q_1$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ et $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, telle que :

- En posant $s(\alpha^{-1}) = t(\alpha)$ and $t(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$ pour tout $\alpha \in Q_1$, nous avons pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $s(\alpha_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}}) = t(\alpha_i^{\varepsilon_i})$;

Soit $\mathcal{Q}$ un carquois aimable. Une **corde** de $\mathcal{Q}$ est une suite finie $\rho = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ avec $\alpha_i \in \mathcal{Q}_1$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ et $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, telle que :

- En posant $s(\alpha^{-1}) = t(\alpha)$ and $t(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$ pour tout $\alpha \in Q_1$, nous avons pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $s(\alpha_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}}) = t(\alpha_i^{\varepsilon_i})$;
- si $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} = 1$, alors $\alpha_{i+1}\alpha_i \notin I$; si $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} = -1$, alors $\alpha_i\alpha_{i+1} \notin I$;

Cordes

Définition 9

Soit $\mathcal{Q}$ un carquois aimable. Une **corde** de $\mathcal{Q}$ est une suite finie $\rho = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ avec $\alpha_i \in Q_1$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ et $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, telle que :

- En posant $s(\alpha^{-1}) = t(\alpha)$ and $t(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$ pour tout $\alpha \in Q_1$, nous avons pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $s(\alpha_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}}) = t(\alpha_i^{\varepsilon_i})$;
- si $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} = 1$, alors $\alpha_{i+1}\alpha_i \notin I$; si $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} = -1$, alors $\alpha_i\alpha_{i+1} \notin I$;
- ρ est réduite : pour $i \in \{1, \dots, k-1\}$, si $\varepsilon_i\varepsilon_{i+1} = -1$, alors $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$.

Soit Q un carquois aimable. Une **corde** de Q est une suite finie $\rho = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ avec $\alpha_i \in Q_1$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ et $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, telle que :

- En posant $s(\alpha^{-1}) = t(\alpha)$ and $t(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$ pour tout $\alpha \in Q_1$, nous avons pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $s(\alpha_{i+1}^{\varepsilon_i+1}) = t(\alpha_i^{\varepsilon_i})$;
- si $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} = 1$, alors $\alpha_{i+1}\alpha_i \notin I$; si $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} = -1$, alors $\alpha_i\alpha_{i+1} \notin I$;
- ρ est réduite : pour $i \in \{1, \dots, k-1\}$, si $\varepsilon_i\varepsilon_{i+1} = -1$, alors $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$.

Posons :

Soit $\mathcal{Q}$ un carquois aimable. Une **corde** de $\mathcal{Q}$ est une suite finie $\rho = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ avec $\alpha_i \in \mathcal{Q}_1$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ et $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, telle que :

- En posant $s(\alpha^{-1}) = t(\alpha)$ and $t(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$ pour tout $\alpha \in Q_1$, nous avons pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $s(\alpha_{i+1}^{\varepsilon_i+1}) = t(\alpha_i^{\varepsilon_i})$;
- si $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} = 1$, alors $\alpha_{i+1}\alpha_i \notin I$; si $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} = -1$, alors $\alpha_i\alpha_{i+1} \notin I$;
- ρ est réduite : pour $i \in \{1, \dots, k-1\}$, si $\varepsilon_i\varepsilon_{i+1} = -1$, alors $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$.

- $l(\rho) := k$ la *longueur* de la corde ρ ,

Définition 9

Soit Q un carquois aimable. Une **corde** de Q est une suite finie $\rho = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ avec $\alpha_i \in Q_1$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ et $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, telle que :

- En posant $s(\alpha^{-1}) = t(\alpha)$ and $t(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$ pour tout $\alpha \in Q_1$, nous avons pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $s(\alpha_{i+1}^{\varepsilon_i+1}) = t(\alpha_i^{\varepsilon_i})$;
- si $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} = 1$, alors $\alpha_{i+1}\alpha_i \notin I$; si $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} = -1$, alors $\alpha_i\alpha_{i+1} \notin I$;
- ρ est réduite : pour $i \in \{1, \dots, k-1\}$, si $\varepsilon_i\varepsilon_{i+1} = -1$, alors $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$.

Posons :

- $l(\rho) := k$ la **longueur** de la corde ρ ,
 $s(\rho) := s(\alpha_1^{\varepsilon_1})$ et $t(\rho) := t(\alpha_k^{\varepsilon_k})$;
- $\text{Supp}_0(\rho) := \{s(\alpha_1^{\varepsilon_1}), t(\alpha_1^{\varepsilon_1}), t(\alpha_2^{\varepsilon_2}), \dots, t(\alpha_k^{\varepsilon_k})\}$ le **support en sommets** de ρ ;
- $\text{Supp}_1(\rho) := \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ le **support en flèches** de ρ .

Définition 9

Soit $\mathcal{Q}$ un carquois aimable. Une **corde** de $\mathcal{Q}$ est une suite finie $\rho = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ avec $\alpha_i \in \mathcal{Q}_1$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ et $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, telle que :

- En posant $s(\alpha^{-1}) = t(\alpha)$ and $t(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$ pour tout $\alpha \in Q_1$, nous avons pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $s(\alpha_{i+1}^{\varepsilon_i+1}) = t(\alpha_i^{\varepsilon_i})$;
- si $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} = 1$, alors $\alpha_{i+1}\alpha_i \notin I$; si $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} = -1$, alors $\alpha_i\alpha_{i+1} \notin I$;
- ρ est réduite : pour $i \in \{1, \dots, k-1\}$, si $\varepsilon_i\varepsilon_{i+1} = -1$, alors $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$.

Posons :

- $l(\rho) := k$ la **longueur** de la corde ρ ,
 $s(\rho) := s(\alpha_1^{\varepsilon_1})$ et $t(\rho) := t(\alpha_k^{\varepsilon_k})$;
- $\text{Supp}_0(\rho) := \{s(\alpha_1^{\varepsilon_1}), t(\alpha_1^{\varepsilon_1}), t(\alpha_2^{\varepsilon_2}), \dots, t(\alpha_k^{\varepsilon_k})\}$ le **support en sommets** de ρ ;
- $\text{Supp}_1(\rho) := \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ le **support en flèches** de ρ .

Pour toute corde ρ , nous identifierons ρ avec ρ^{-1} .

Cordes

Définition 9

Soit $\mathcal{Q}$ un carquois aimable. Une **corde** de $\mathcal{Q}$ est une suite finie $\rho = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ avec $\alpha_i \in Q_1$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ et $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, telle que :

- En posant $s(\alpha^{-1}) = t(\alpha)$ and $t(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$ pour tout $\alpha \in Q_1$, nous avons pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $s(\alpha_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}}) = t(\alpha_i^{\varepsilon_i})$;
- si $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} = 1$, alors $\alpha_{i+1}\alpha_i \notin I$; si $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} = -1$, alors $\alpha_i\alpha_{i+1} \notin I$;
- ρ est réduite : pour $i \in \{1, \dots, k-1\}$, si $\varepsilon_i\varepsilon_{i+1} = -1$, alors $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$.

Posons :

- $l(\rho) := k$ la **longueur** de la corde ρ ,
 $s(\rho) := s(\alpha_1^{\varepsilon_1})$ et $t(\rho) := t(\alpha_k^{\varepsilon_k})$;
- $\text{Supp}_0(\rho) := \{s(\alpha_1^{\varepsilon_1}), t(\alpha_1^{\varepsilon_1}), t(\alpha_2^{\varepsilon_2}), \dots, t(\alpha_k^{\varepsilon_k})\}$ le **support en sommets** de ρ ;
- $\text{Supp}_1(\rho) := \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ le **support en flèches** de ρ .

Pour toute corde ρ , nous identifions ρ avec ρ^{-1} .

Une **sous-corde** de ρ est une corde de la forme $\alpha_j^{\varepsilon_j} \dots \alpha_i^{\varepsilon_i}$ avec $1 \leq i \leq j \leq k$, ou un chemin paresseux e_q pour $q \in \text{Supp}_0(\rho)$.

Définition 9

Soit $\mathcal{Q}$ un carquois aimable. Une **corde** de $\mathcal{Q}$ est une suite finie $\rho = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ avec $\alpha_i \in \mathcal{Q}_1$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ et $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, telle que :

- En posant $s(\alpha^{-1}) = t(\alpha)$ and $t(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$ pour tout $\alpha \in Q_1$, nous avons pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $s(\alpha_{i+1}^{\varepsilon_i+1}) = t(\alpha_i^{\varepsilon_i})$;
- si $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} = 1$, alors $\alpha_{i+1}\alpha_i \notin I$; si $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} = -1$, alors $\alpha_i\alpha_{i+1} \notin I$;
- ρ est réduite : pour $i \in \{1, \dots, k-1\}$, si $\varepsilon_i\varepsilon_{i+1} = -1$, alors $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$.

Posons :

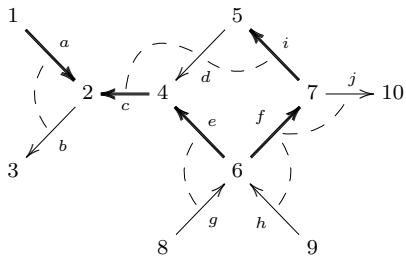
- $l(\rho) := k$ la **longueur** de la corde ρ ,
 $s(\rho) := s(\alpha_1^{\varepsilon_1})$ et $t(\rho) := t(\alpha_k^{\varepsilon_k})$;
- $\text{Supp}_0(\rho) := \{s(\alpha_1^{\varepsilon_1}), t(\alpha_1^{\varepsilon_1}), t(\alpha_2^{\varepsilon_2}), \dots, t(\alpha_k^{\varepsilon_k})\}$ le **support en sommets** de ρ ;
- $\text{Supp}_1(\rho) := \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ le **support en flèches** de ρ .

Pour toute corde ρ , nous identifierons ρ avec ρ^{-1} .

Une *sous-corde* de ρ est une corde de la forme $\alpha_j^{\varepsilon_j} \dots \alpha_i^{\varepsilon_i}$ avec $1 \leq i \leq j \leq k$, ou un chemin paresseux e_q pour $q \in \text{Supp}_0(\rho)$.

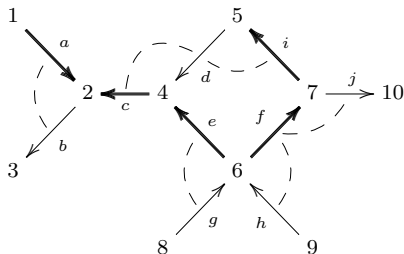
Une corde ρ de $\mathcal{Q}$ est dite **maximale** s'il n'y a pas de $\alpha \in \mathcal{Q}_1$ telle que ni $\alpha\rho$, ni $\alpha^{-1}\rho$, ni $\rho\alpha$ et ni $\rho\alpha^{-1}$ est une corde.

Cordes

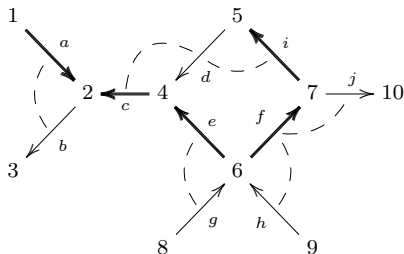


Cordes

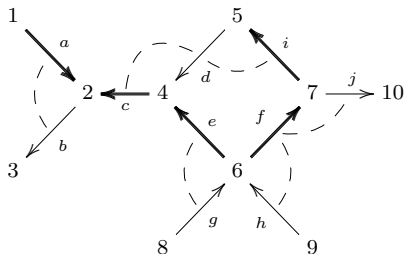
- $\rho = ife^{-1}c^{-1}a$ est bien une corde ;



Cordes

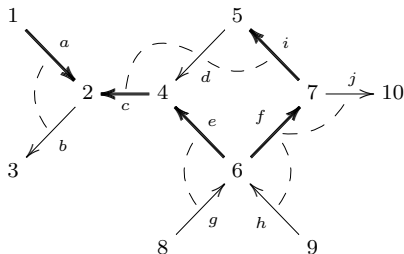


- $\rho = ife^{-1}c^{-1}a$ est bien une corde ;
- $l(\rho) = 5$;

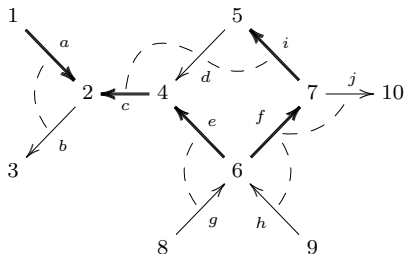


- $\rho = ife^{-1}c^{-1}a$ est bien une corde ;
- $l(\rho) = 5$;
- $\text{Supp}_0(\rho) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$;

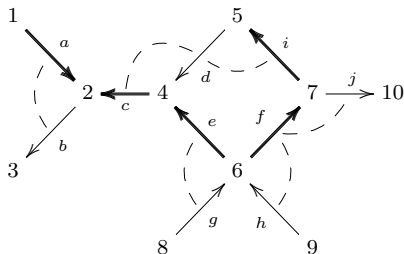
Cordes



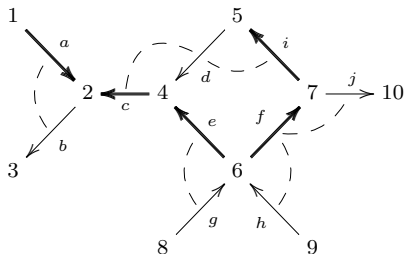
- $\rho = ife^{-1}c^{-1}a$ est bien une corde ;
- $l(\rho) = 5$;
- $\text{Supp}_0(\rho) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$;
- $\text{Supp}_1(\rho) = \{a, c, e, f, i\}$;



- $\rho = ife^{-1}c^{-1}a$ est bien une corde ;
- $l(\rho) = 5$;
- $\text{Supp}_0(\rho) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$;
- $\text{Supp}_1(\rho) = \{a, c, e, f, i\}$;
- Les sous-cordes de ρ sont :

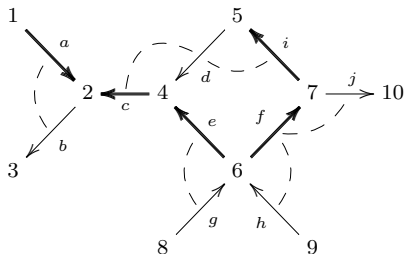


- $\rho = ife^{-1}c^{-1}a$ est bien une corde ;
- $l(\rho) = 5$;
- $\text{Supp}_0(\rho) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$;
- $\text{Supp}_1(\rho) = \{a, c, e, f, i\}$;
- Les sous-cordes de ρ sont :
 - les chemins paresseux : e_q pour $q \in \text{Supp}_0(\rho)$;



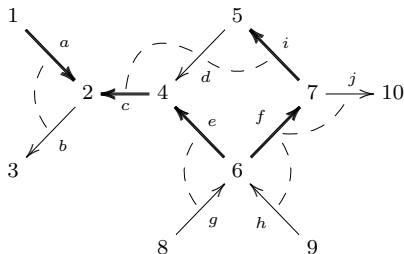
- $\rho = ife^{-1}c^{-1}a$ est bien une corde ;
- $l(\rho) = 5$;
- $\text{Supp}_0(\rho) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$;
- $\text{Supp}_1(\rho) = \{a, c, e, f, i\}$;
- Les sous-cordes de ρ sont :
 - les chemins paresseux : e_q pour $q \in \text{Supp}_0(\rho)$;
 - les flèches : $\text{Supp}_1(\rho)$;

Cordes



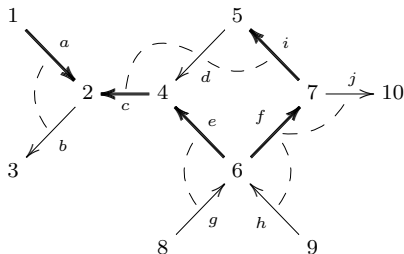
- $\rho = ife^{-1}c^{-1}a$ est bien une corde ;
- $l(\rho) = 5$;
- $\text{Supp}_0(\rho) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$;
- $\text{Supp}_1(\rho) = \{a, c, e, f, i\}$;
- Les sous-cordes de ρ sont :
 - les chemins paresseux : e_q pour $q \in \text{Supp}_0(\rho)$;
 - les flèches : $\text{Supp}_1(\rho)$;
 - les cordes de longueur 2 : $if, fe^{-1}, ce, a^{-1}c$;

Cordes



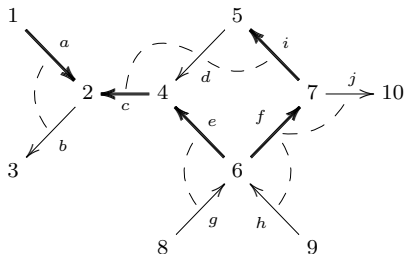
- $\rho = ife^{-1}c^{-1}a$ est bien une corde ;
- $l(\rho) = 5$;
- $\text{Supp}_0(\rho) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$;
- $\text{Supp}_1(\rho) = \{a, c, e, f, i\}$;
- Les sous-cordes de ρ sont :
 - les chemins paresseux : e_q pour $q \in \text{Supp}_0(\rho)$;
 - les flèches : $\text{Supp}_1(\rho)$;
 - les cordes de longueur 2 : $if, fe^{-1}, ce, a^{-1}c$;
 - les cordes de longueur 3 : $ife^{-1}, cef^{-1}, a^{-1}ce$;

Cordes



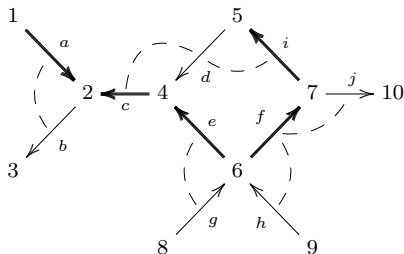
- $\rho = ife^{-1}c^{-1}a$ est bien une corde ;
- $l(\rho) = 5$;
- $\text{Supp}_0(\rho) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$;
- $\text{Supp}_1(\rho) = \{a, c, e, f, i\}$;
- Les sous-cordes de ρ sont :
 - les chemins paresseux : e_q pour $q \in \text{Supp}_0(\rho)$;
 - les flèches : $\text{Supp}_1(\rho)$;
 - les cordes de longueur 2 : $if, fe^{-1}, ce, a^{-1}c$;
 - les cordes de longueur 3 : $ife^{-1}, cef^{-1}, a^{-1}ce$;
 - les cordes de longueur 4 : $ife^{-1}c^{-1}, fe^{-1}c^{-1}a$;

Cordes



- $\rho = ife^{-1}c^{-1}a$ est bien une corde ;
- $l(\rho) = 5$;
- $\text{Supp}_0(\rho) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$;
- $\text{Supp}_1(\rho) = \{a, c, e, f, i\}$;
- Les sous-cordes de ρ sont :
 - les chemins paresseux : e_q pour $q \in \text{Supp}_0(\rho)$;
 - les flèches : $\text{Supp}_1(\rho)$;
 - les cordes de longueur 2 : $if, fe^{-1}, ce, a^{-1}c$;
 - les cordes de longueur 3 : $ife^{-1}, cef^{-1}, a^{-1}ce$;
 - les cordes de longueur 4 : $ife^{-1}c^{-1}, fe^{-1}c^{-1}a$;
 - les cordes de longueur 5 : ρ .

Cordes



De plus, ρ est une corde maximale de $\mathcal{Q}$.

- $\rho = ife^{-1}c^{-1}a$ est bien une corde ;
- $l(\rho) = 5$;
- $\text{Supp}_0(\rho) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$;
- $\text{Supp}_1(\rho) = \{a, c, e, f, i\}$;
- Les sous-cordes de ρ sont :
 - les chemins paresseux : e_q pour $q \in \text{Supp}_0(\rho)$;
 - les flèches : $\text{Supp}_1(\rho)$;
 - les cordes de longueur 2 : $if, fe^{-1}, ce, a^{-1}c$;
 - les cordes de longueur 3 : $ife^{-1}, cef^{-1}, a^{-1}ce$;
 - les cordes de longueur 4 : $ife^{-1}c^{-1}, fe^{-1}c^{-1}a$;
 - les cordes de longueur 5 : ρ .

Cordes

Cordes

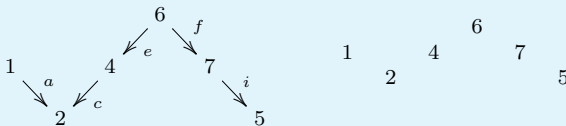
Remarque 10

Plus visuellement, nous pourrions représenter les cordes comme ci-suit.

Cordes

Remarque 10

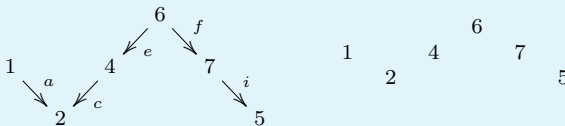
Plus visuellement, nous pourrions représenter les cordes comme ci-suit.



Cordes

Remarque 10

Plus visuellement, nous pourrions représenter les cordes comme ci-suit.

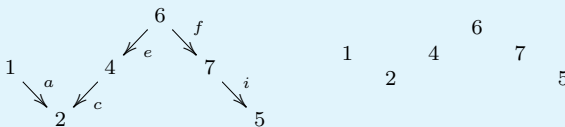


Par convention, les flèches pointent vers le bas.

Cordes

Remarque 10

Plus visuellement, nous pourrions représenter les cordes comme ci-suit.

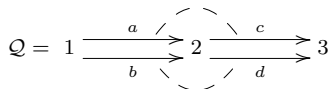


Par convention, les flèches pointent vers le bas.

Nous pouvons également choisir de ne pas représenter les flèches mais uniquement garder en mémoire le suite des sommets que nous visitons, cela à condition qu'il n'y ait pas d'ambiguïtés sur les flèches que nous avons à suivre.

Représentations de corde

Représentations de corde

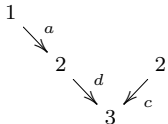


Représentations de corde

$$Q = 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{c} \\ \xrightarrow{d} \end{array} 3 \quad \rho = 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{c} \\ \xrightarrow{d} \end{array} 3$$

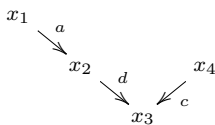
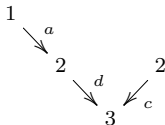
Représentations de corde

$$Q = 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{c} \\ \xrightarrow{d} \end{array} 3 \quad \rho = 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{c} \\ \xrightarrow{d} \end{array} 3$$



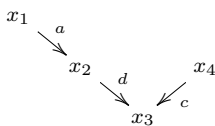
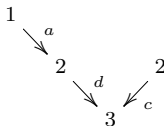
Représentations de corde

$$Q = 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{c} \\ \xrightarrow{d} \end{array} 3 \quad \rho = 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{c} \\ \xrightarrow{d} \end{array} 3$$



Représentations de corde

$$Q = 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{c} \\ \xrightarrow{d} \end{array} 3 \quad \rho = 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{c} \\ \xrightarrow{d} \end{array} 3$$



$$\begin{array}{c} \langle x_1 \rangle \begin{array}{c} \xrightarrow{x_1 \mapsto x_2} \\ \xrightarrow{0} \end{array} \langle x_2, x_4 \rangle \begin{array}{c} \xrightarrow{x_2 \mapsto 0} \\ \xrightarrow{x_4 \mapsto x_3} \\ \xrightarrow{x_2 \mapsto x_3} \\ \xrightarrow{x_4 \mapsto 0} \end{array} \langle x_3 \rangle \\ \parallel \\ \mathbb{K} \begin{array}{c} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \\ \xrightarrow{0} \end{array} \mathbb{K}^2 \begin{array}{c} \xrightarrow{[0 \ 1]} \\ \xrightarrow{[1 \ 0]} \end{array} \mathbb{K} \end{array}$$

Représentations de corde

Représentations de corde

Définition 11

Soit ρ une corde de $\mathcal{Q}$. La *représentation de corde* $M(\rho)$ de $\mathcal{Q}$ est la représentation de $\text{rep}(\mathcal{Q})$ définie comme ci-suit :

- Posons $v_0 = s(\alpha_1^{\varepsilon_1})$ et pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $v_i = t(\alpha_i^{\varepsilon_i})$;
- Pour $q \in Q_0$, $M(\rho)_q$ est le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel engendré par $\{x_i \mid v_i = q\}$ en tant que base, où les x_i sont des éléments formels ;
- Pour $\beta \in Q_1$, $M(\rho)_\beta : M(\rho)_{s(\beta)} \longrightarrow M(\rho)_{t(\beta)}$ est une application linéaire telle que :

$$M(\rho)_\beta(x_i) = \begin{cases} x_{i-1} & \text{si } \alpha_i = \beta \text{ et } \varepsilon_i = -1 \\ x_{i+1} & \text{si } \alpha_{i+1} = \beta \text{ et } \varepsilon_{i+1} = 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Plan

① Connaissances de bases

Algèbres aimables

Représentations / Modules sur une algèbre aimable

② Combinatoire des cordes et des bandes

Représentations de corde

Représentations de bande

Représentations indécomposables

Structure des morphismes entre les représentations

③ La retrouvabilité (canonique) de Jordan

La retrouvabilité de Jordan d'une catégorie

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Une classe de sous-catégories intéressante

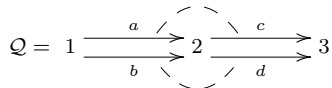
④ Résultats principaux / Aller plus loin

Résultats principaux

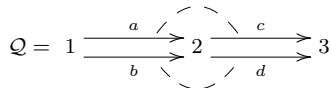
Aller plus loin

Bandes

Bandes

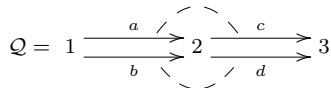


Bandes



La corde $\omega = b^{-1}c^{-1}da$ est une *bande*.

Bandes

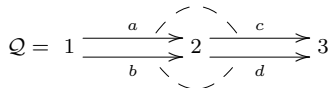


La corde $\omega = b^{-1}c^{-1}da$ est une *bande*.

Définition 12

Soit Q un carquois aimable. Une *bande* de Q est une corde non paresseuse ω telle que :

Bandes



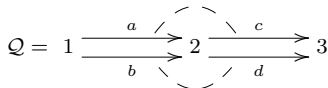
La corde $\omega = b^{-1}c^{-1}da$ est une *bande*.

Définition 12

Soit Q un carquois aimable. Une *bande* de Q est une corde non paresseuse ω telle que :

- $s(\omega) = t(\omega)$;

Bandes



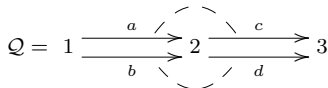
La corde $\omega = b^{-1}c^{-1}da$ est une *bande*.

Définition 12

Soit Q un carquois aimable. Une *bande* de Q est une corde non paresseuse ω telle que :

- $s(\omega) = t(\omega)$;
- Pour tout $i \geq 1$, $\omega^i = \underbrace{\omega \dots \omega}_{i \text{ fois}}$ est une corde de Q ;

Bandes



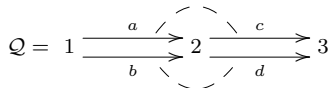
La corde $\omega = b^{-1}c^{-1}da$ est une *bande*.

Définition 12

Soit Q un carquois aimable. Une *bande* de Q est une corde non paresseuse ω telle que :

- $s(\omega) = t(\omega)$;
- Pour tout $i \geq 1$, $\omega^i = \underbrace{\omega \dots \omega}_{i \text{ fois}}$ est une corde de Q ;
- ω est primitive : ω n'est pas la puissance d'une corde plus courte.

Bandes



La corde $\omega = b^{-1}c^{-1}da$ est une *bande*.

Définition 12

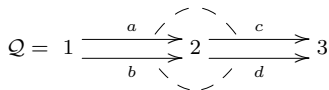
Soit Q un carquois aimable. Une *bande* de Q est une corde non paresseuse ω telle que :

- $s(\omega) = t(\omega)$;
- Pour tout $i \geq 1$, $\omega^i = \underbrace{\omega \dots \omega}_{i \text{ fois}}$ est une corde de Q ;
- ω est primitive : ω n'est pas la puissance d'une corde plus courte.

Deux bandes de Q , ω et ω' , sont dites (*cycliquement*) *conjuguées* ($\omega \sim_{\text{cyc}} \omega'$) si nous pouvons obtenir ω' en appliquant une permutation cyclique sur les flèches qui composent ω .

Représentations de bande

Représentations de bande

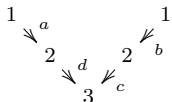


Représentations de bande

$$Q = 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{c} \\ \xrightarrow{d} \end{array} 3 \quad \text{Reprenons la bande } \omega = b^{-1}c^{-1}da.$$

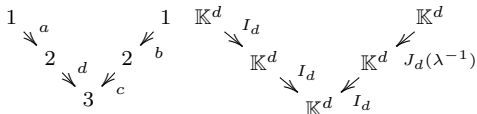
Représentations de bande

$$Q = 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{c} \\ \xrightarrow{d} \end{array} 3 \quad \text{Reprenons la bande } \omega = b^{-1}c^{-1}da.$$



Représentations de bande

$$Q = 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{c} \\ \xrightarrow{d} \end{array} 3 \quad \text{Reprenons la bande } \omega = b^{-1}c^{-1}da.$$



Représentations de bande

$$Q = 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{c} \\ \xrightarrow{d} \end{array} 3 \quad \text{Reprenons la bande } \omega = b^{-1}c^{-1}da.$$

$$\begin{array}{c}
 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{d} 3 \\
 \quad \quad \quad \nwarrow c \\
 \quad \quad \quad 2 \xrightarrow{b} 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \mathbb{K}^d \xrightarrow{I_d} \mathbb{K}^d \xrightarrow{I_d} \mathbb{K}^d \xrightarrow{I_d} \mathbb{K}^d \\
 \quad \quad \quad \nwarrow I_d \quad \nwarrow I_d \quad \nwarrow I_d
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \mathbb{K}^d \xrightarrow{J_d(\lambda^{-1})} \mathbb{K}^d
 \end{array}
 \quad
 J_d(\lambda^{-1}) = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

Représentations de bande

$$Q = 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{c} \\ \xrightarrow{d} \end{array} 3 \quad \text{Reprenons la bande } \omega = b^{-1}c^{-1}da.$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ \searrow a \\ 2 \\ \searrow d \\ 3 \end{array}
 \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow b \\ 2 \\ \swarrow c \\ 3 \end{array}
 \begin{array}{c} \mathbb{K}^d \\ \searrow I_d \\ \mathbb{K}^d \\ \searrow I_d \\ \mathbb{K}^d \end{array}
 \begin{array}{c} \mathbb{K}^d \\ \swarrow J_d(\lambda^{-1}) \\ \mathbb{K}^d \\ \swarrow J_d(\lambda^{-1}) \\ \mathbb{K}^d \end{array}
 \quad J_d(\lambda^{-1}) = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & & & \\ & \ddots & & \\ 1 & & \ddots & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \mathbb{K}^d \\ \xrightarrow{\begin{bmatrix} I_d \\ 0 \end{bmatrix}} \\ \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ J_d(\lambda^{-1}) \end{bmatrix}} \end{array}
 \begin{array}{c} \mathbb{K}^{2d} \\ \xrightarrow{[0 \ I_d]} \\ \xrightarrow{[I_d \ 0]} \end{array}
 \mathbb{K}^d$$

Représentations de bande

Représentations de bande

Définition 13

Soit $\omega = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ une bande de $\mathcal{Q}$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $d \in \mathbb{N}^*$. La *représentation de bande* $M(\omega, \lambda, d)$ de $\mathcal{Q}$ est une représentation définie comme ci-suit :

- Posons $v_0 = s(\alpha_1^{\varepsilon_1})$ et pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $v_i = t(\alpha_i^{\varepsilon_i})$;
- Pour $q \in Q_0$, $M(\omega, \lambda, d)_q$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel généré par $\{x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(d)} \mid v_i = q\}$ en tant que base, où les $x_i^{(j)}$ sont des éléments formels ;
- Pour $\gamma \in Q_1$, $M(\omega, \lambda, d)_\gamma$ est une transformation linéaire définie comme ci-suit :

$$M(\omega, \lambda, d)_\gamma(x_i^{(j)}) = \begin{cases} x_{i-1}^{(j)} & \text{si } \gamma = \alpha_i \text{ pour } 1 \leq i < k, 1 \leq j \leq d \text{ et } \varepsilon_i = -1 \\ \lambda^{-1} x_{k-1}^{(j)} + x_{k-1}^{(j+1)} & \text{si } \gamma = \alpha_k \text{ pour } i = 0, 1 \leq j < d \text{ et } \varepsilon_k = -1 \\ \lambda^{-1} x_{k-1}^{(d)} & \text{si } \gamma = \alpha_k \text{ pour } i = 0, j = d \text{ et } \varepsilon_k = -1 \\ x_{i+1}^{(j)} & \text{si } \gamma = \alpha_{i+1} \text{ pour } 1 \leq i < k-1, 1 \leq j \leq d \text{ et } \varepsilon_i = 1 \\ \lambda x_0^{(j)} + x_0^{(j+1)} & \text{si } \gamma = \alpha_k \text{ pour } i = k-1, 1 \leq j < d \text{ et } \varepsilon_k = 1 \\ \lambda x_0^{(d)} & \text{et } \gamma = \alpha_k \text{ pour } i = k-1, j = d \text{ et } \varepsilon_k = 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Plan

① Connaissances de bases

Algèbres aimables

Représentations / Modules sur une algèbre aimable

② Combinatoire des cordes et des bandes

Représentations de corde

Représentations de bande

Représentations indécomposables

Structure des morphismes entre les représentations

③ La retrouvabilité (canonique) de Jordan

La retrouvabilité de Jordan d'une catégorie

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Une classe de sous-catégories intéressante

④ Résultats principaux / Aller plus loin

Résultats principaux

Aller plus loin

Représentations indécomposables

Représentations indécomposables

Considérons le carquois suivant.

$$Q = 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2$$

Représentations indécomposables

Considérons le carquois suivant.

$$Q = 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2$$

Les représentations indécomposables de Q sont :

Représentations indécomposables

Considérons le carquois suivant.

$$\mathcal{Q} = 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2$$

Les représentations indécomposables de $\mathcal{Q}$ sont :

- Les représentations de corde :

$$M(e_1), M(e_2), M(a), M(b^{-1}), M(b^{-1}a), M(ab^{-1}), M(ab^{-1}a), M(b^{-1}ab^{-1}), \dots$$

Représentations indécomposables

Considérons le carquois suivant.

$$\mathcal{Q} = 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2$$

Les représentations indécomposables de $\mathcal{Q}$ sont :

- Les représentations de corde :

$$M(e_1), M(e_2), M(a), M(b^{-1}), M(b^{-1}a), M(ab^{-1}), M(ab^{-1}a), M(b^{-1}ab^{-1}), \dots \\ \dots, M((b^{-1}a)^n), M((ab^{-1})^n), M(a(b^{-1}a)^n), M((b^{-1}a)^nb^{-1}) \text{ (pour tout } n \in \mathbb{N} \text{)};$$

$$\begin{array}{c} \mathbb{K}^{n+1} \xrightarrow{\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}} \mathbb{K}^n \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathbb{K}^n \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix}} \mathbb{K}^{n+1} \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathbb{K}^{n+1} \xrightarrow{\begin{bmatrix} I_{n+1} \\ 0 & I_n \end{bmatrix}} \mathbb{K}^{n+1} \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathbb{K}^{n+1} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^{n+1} \end{array}$$

- Les représentation de bande : $M(b^{-1}a, \lambda, n)$ pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{c} \mathbb{K}^n \xrightarrow{I_n} \mathbb{K}^n \\ \xrightarrow{J_n(\lambda^{-1})} \end{array}$$

Représentation Indécomposables

Représentation Indécomposables

Théorème 14 [Butler-Ringel '87]

Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos et $\mathcal{Q}$ un carquois aimable. Toute représentation indécomposable de $\mathcal{Q}$ est isomorphe à une représentation de corde ou de bande de $\mathcal{Q}$.
De plus :

Représentation Indécomposables

- Une représentation de corde n'est pas isomorphe à une représentation de bande ;

Représentation Indécomposables

- Une représentation de corde n'est pas isomorphe à une représentation de bande ;
- $M(\rho) \cong M(\rho')$ si et seulement si $\rho' = \rho^{\pm 1}$;

Représentation Indécomposables

Représentation Indécomposables

Théorème 14 [Butler-Ringel '87]

Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos et $\mathcal{Q}$ un carquois aimable. Toute représentation indécomposable de $\mathcal{Q}$ est isomorphe à une représentation de corde ou de bande de $\mathcal{Q}$.
De plus :

- Une représentation de corde n'est pas isomorphe à une représentation de bande ;
- $M(\rho) \cong M(\rho')$ si et seulement si $\rho' = \rho^{\pm 1}$;
- $M(\omega, \lambda, d) \cong M(\omega', \lambda', d')$ si et seulement si $d = d'$ et :
 - soit $\omega \sim_{\text{cyc}} \omega'$ et $\lambda = \lambda'$;

Représentation Indécomposables

Plan

① Connaissances de bases

Algèbres aimables

Représentations / Modules sur une algèbre aimable

② Combinatoire des cordes et des bandes

Représentations de corde

Représentations de bande

Représentations indécomposables

Structure des morphismes entre les représentations

③ La retrouvabilité (canonique) de Jordan

La retrouvabilité de Jordan d'une catégorie

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Une classe de sous-catégories intéressante

④ Résultats principaux / Aller plus loin

Résultats principaux

Aller plus loin

Petite problématique

Petite problématique

Considérons le carquois suivant.

$$Q = 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$$

Petite problématique

Considérons le carquois suivant.

$$Q = 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$$

$$\text{Considérons } X = M(a) \oplus M(b) = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} & \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K} .$$

Petite problématique

Considérons le carquois suivant.

$$Q = 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$$

$$\text{Considérons } X = M(a) \oplus M(b) = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} & \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K}.$$

Nous souhaitons décrire $\text{End}(X)$.

Sous-cordes au-dessus et en-dessous

$$X = M(a) \oplus M(b) = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} & \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K}$$

Sous-cordes au-dessus et en-dessous

$$X = M(a) \oplus M(b) = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K}$$

Remarquons que pour comprendre $\text{End}(X)$, il suffit de comprendre les morphismes entre ses facteurs indécomposables.

Sous-cordes au-dessus et en-dessous

$$X = M(a) \oplus M(b) = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K}$$

Remarquons que pour comprendre $\text{End}(X)$, il suffit de comprendre les morphismes entre ses facteurs indécomposables. Prenons $M(a)$ et $M(b)$:

Sous-cordes au-dessus et en-dessous

$$X = M(a) \oplus M(b) = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K}$$

Remarquons que pour comprendre $\text{End}(X)$, il suffit de comprendre les morphismes entre ses facteurs indécomposables. Prenons $M(a)$ et $M(b)$:

- $\text{Hom}(M(a), M(b)) \cong$

Sous-cordes au-dessus et en-dessous

$$X = M(a) \oplus M(b) = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K}$$

Remarquons que pour comprendre $\text{End}(X)$, il suffit de comprendre les morphismes entre ses facteurs indécomposables. Prenons $M(a)$ et $M(b)$:

- $\text{Hom}(M(a), M(b)) \cong 0$:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{K} & \xrightarrow{1} & \mathbb{K} & \longrightarrow & 0 \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 0 & & 0 & & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K}
 \end{array}$$

Sous-cordes au-dessus et en-dessous

$$X = M(a) \oplus M(b) = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K}$$

Remarquons que pour comprendre $\text{End}(X)$, il suffit de comprendre les morphismes entre ses facteurs indécomposables. Prenons $M(a)$ et $M(b)$:

- $\text{Hom}(M(a), M(b)) \cong 0$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K} & \xrightarrow{1} & \mathbb{K} & \longrightarrow & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \end{array}$$

- $\text{Hom}(M(b), M(a)) \cong$

Sous-cordes au-dessus et en-dessous

$$X = M(a) \oplus M(b) = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K}$$

Remarquons que pour comprendre $\text{End}(X)$, il suffit de comprendre les morphismes entre ses facteurs indécomposables. Prenons $M(a)$ et $M(b)$:

- $\text{Hom}(M(a), M(b)) \cong 0$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K} & \xrightarrow{1} & \mathbb{K} & \longrightarrow & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \end{array}$$

- $\text{Hom}(M(b), M(a)) \cong \mathbb{K}$:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{K} & \xrightarrow{1} & \mathbb{K} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & k & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{K} & \xrightarrow{1} & \mathbb{K} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Sous-cordes au-dessus et en-dessous

Sous-cordes au-dessus et en-dessous

Définition 15

Soit $\rho = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ une corde de $\mathcal{Q}$.

Une sous-corde $\sigma = \alpha_j^{\varepsilon_j} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ de ρ est dite :

Sous-cordes au-dessus et en-dessous

Définition 15

Soit $\rho = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ une corde de $\mathcal{Q}$.

Une sous-corde $\sigma = \alpha_j^{\varepsilon_j} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ de ρ est dite :

- *au-dessus* de ρ si $i = 1$ ou $\varepsilon_{i-1} = -1$, et $j = k$ ou $\varepsilon_{j+1} = 1$;

Sous-cordes au-dessus et en-dessous

Définition 15

Soit $\rho = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ une corde de $\mathcal{Q}$.

Une sous-corde $\sigma = \alpha_j^{\varepsilon_j} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ de ρ est dite :

- *au-dessus* de ρ si $i = 1$ ou $\varepsilon_{i-1} = -1$, et $j = k$ ou $\varepsilon_{j+1} = 1$;
- *en-dessous* de ρ si $i = 1$ ou $\varepsilon_{i-1} = 1$, et $j = k$ ou $\varepsilon_{j+1} = -1$.

Soit $\rho = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ une corde de $\mathcal{Q}$.

Une sous-corde $\sigma = \alpha_j^{\varepsilon_j} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ de ρ est dite :

- *au-dessus* de ρ si $i = 1$ ou $\varepsilon_{i-1} = -1$, et $j = k$ ou $\varepsilon_{j+1} = 1$;
- *en-dessous* de ρ si $i = 1$ ou $\varepsilon_{i-1} = 1$, et $j = k$ ou $\varepsilon_{j+1} = -1$.

Visuellement :



Sous-cordes au-dessus et en-dessous

Définition 15

Soit $\rho = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ une corde de $\mathcal{Q}$.

Une sous-corde $\sigma = \alpha_j^{\varepsilon_j} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ de ρ est dite :

- au-dessus* de ρ si $i = 1$ ou $\varepsilon_{i-1} = -1$, et $j = k$ ou $\varepsilon_{j+1} = 1$;
- en-dessous* de ρ si $i = 1$ ou $\varepsilon_{i-1} = 1$, et $j = k$ ou $\varepsilon_{j+1} = -1$.

Visuellement :



Dans notre exemple :

Définition 15

Une sous-corde $\sigma = \alpha_j^{\varepsilon_j} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ de ρ est dite :

- *au-dessus* de ρ si $i = 1$ ou $\varepsilon_{i-1} = -1$, et $j = k$ ou $\varepsilon_{j+1} = 1$;
- *en-dessous* de ρ si $i = 1$ ou $\varepsilon_{i-1} = 1$, et $j = k$ ou $\varepsilon_{j+1} = -1$.

- au-dessus de a : e_1, a ; en-dessous de a : e_2, a ;

Soit $\rho = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ une corde de $\mathcal{Q}$.

Une sous-corde $\sigma = \alpha_j^{\varepsilon_j} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ de ρ est dite :

- *au-dessus* de ρ si $i = 1$ ou $\varepsilon_{i-1} = -1$, et $j = k$ ou $\varepsilon_{j+1} = 1$;
- *en-dessous* de ρ si $i = 1$ ou $\varepsilon_{i-1} = 1$, et $j = k$ ou $\varepsilon_{j+1} = -1$.

Visuellement :



Dans notre exemple :

- au-dessus de a : e_1, a ; en-dessous de a : e_2, a ;
- au-dessus de b : e_2, b ; en-dessous de b : e_3, b .

Morphismes entre représentations indécomposables

Morphismes entre représentations indécomposables

Théorème 16

Soit ρ et ρ' deux cordes $\mathcal{Q}$.

Morphismes entre représentations indécomposables

Théorème 16

Soit ρ et ρ' deux cordes $\mathcal{Q}$.

Alors $\text{Hom}(M(\rho), M(\rho')) \cong \mathbb{K}^{\#[\rho, \rho']}$ où $[\rho, \rho']$ désigne l'ensemble des couples (σ, σ') telle que la sous-corde σ est au-dessus de ρ , la sous-corde σ' est en-dessous de ρ' et $\sigma' = \sigma^{\pm 1}$.

Morphismes entre représentations indécomposables

Théorème 16

Soit ρ et ρ' deux cordes $\mathcal{Q}$.

Alors $\text{Hom}(M(\rho), M(\rho')) \cong \mathbb{K}^{\#[\rho, \rho']}$ où $[\rho, \rho']$ désigne l'ensemble des couples (σ, σ') telle que la sous-corde σ est au-dessus de ρ , la sous-corde σ' est en-dessous de ρ' et $\sigma' = \sigma^{\pm 1}$.

Terminons alors notre exemple. Nous avons :

Morphismes entre représentations indécomposables

Théorème 16

Soit ρ et ρ' deux cordes $\mathcal{Q}$.

Alors $\text{Hom}(M(\rho), M(\rho')) \cong \mathbb{K}^{\#[\rho, \rho']}$ où $[\rho, \rho']$ désigne l'ensemble des couples (σ, σ') telle que la sous-corde σ est au-dessus de ρ , la sous-corde σ' est en-dessous de ρ' et $\sigma' = \sigma^{\pm 1}$.

Terminons alors notre exemple. Nous avons :

- $\text{End}(M(a)) \cong \text{End}(M(b)) \cong \mathbb{K}$;

Morphismes entre représentations indécomposables

Théorème 16

Soit ρ et ρ' deux cordes $\mathcal{Q}$.

Alors $\text{Hom}(M(\rho), M(\rho')) \cong \mathbb{K}^{\#[\rho, \rho']}$ où $[\rho, \rho']$ désigne l'ensemble des couples (σ, σ') telle que la sous-corde σ est au-dessus de ρ , la sous-corde σ' est en-dessous de ρ' et $\sigma' = \sigma^{\pm 1}$.

Terminons alors notre exemple. Nous avons :

- $\text{End}(M(a)) \cong \text{End}(M(b)) \cong \mathbb{K}$;
- $\text{Hom}(M(b), M(a)) \cong \mathbb{K}$ et $\text{Hom}(M(a), M(b)) \cong 0$.

Morphismes entre représentations indécomposables

Théorème 16

Soit ρ et ρ' deux cordes $\mathcal{Q}$.

Alors $\text{Hom}(M(\rho), M(\rho')) \cong \mathbb{K}^{\#[\rho, \rho']}$ où $[\rho, \rho']$ désigne l'ensemble des couples (σ, σ') telle que la sous-corde σ est au-dessus de ρ , la sous-corde σ' est en-dessous de ρ' et $\sigma' = \sigma^{\pm 1}$.

Terminons alors notre exemple. Nous avons :

- $\text{End}(M(a)) \cong \text{End}(M(b)) \cong \mathbb{K}$;
- $\text{Hom}(M(b), M(a)) \cong \mathbb{K}$ et $\text{Hom}(M(a), M(b)) \cong 0$.

D'où $\text{End}(X) \cong \mathbb{K}^3$.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{K} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & \mathbb{K}^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} & \mathbb{K} \\
 \downarrow k_1 & & \downarrow \begin{bmatrix} k_1 \\ 0 \end{bmatrix} & & \downarrow k_3 \\
 \mathbb{K} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & \mathbb{K}^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} & \mathbb{K}
 \end{array}$$

Morphismes entre représentations indécomposables

Morphismes entre représentations indécomposables

Les morphismes associés à ces sous-cordes sont appelés *morphismes de graphe* (« graph maps »).

Morphismes entre représentations indécomposables

Remarque(s) 17

Les morphismes associés à ces sous-cordes sont appelés *morphismes de graphe* (« graph maps »).

Comme nous venons de le voir, ces morphisme suffisent pour décrire les morphismes entre représentations de corde.

Toutefois, ces morphismes ne décrivent pas entièrement les morphismes entres représentations de bandes.

Morphismes entre représentations indécomposables

Remarque(s) 17

Les morphismes associés à ces sous-cordes sont appelés *morphismes de graphe* (« graph maps »).

Comme nous venons de le voir, ces morphisme suffisent pour décrire les morphismes entre représentations de corde.

Toutefois, ces morphismes ne décrivent pas entièrement les morphismes entres représentations de bandes.

Nous n'aurons pas besoin de se préoccuper de cela dans ce qui suivra.

Plan

① Connaissances de bases

Algèbres aimables

Représentations / Modules sur une algèbre aimable

② Combinatoire des cordes et des bandes

Représentations de corde

Représentations de bande

Représentations indécomposables

Structure des morphismes entre les représentations

③ La retrouvabilité (canonique) de Jordan

La retrouvabilité de Jordan d'une catégorie

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Une classe de sous-catégories intéressante

④ Résultats principaux / Aller plus loin

Résultats principaux

Aller plus loin

La donnée de la forme de Jordan générique d'une représentation

La donnée de la forme de Jordan générique d'une représentation

(Re)prenons le carquois suivant.

$$Q = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

La donnée de la forme de Jordan générique d'une représentation

(Re)prenons le carquois suivant.

$$\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

(Re)prenons la représentation suivante.

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{[0 \ 0 \ 1]} \mathbb{K}$$

La donnée de la forme de Jordan générique d'une représentation

(Re)prenons le carquois suivant.

$$\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

(Re)prenons la représentation suivante.

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K}$$

$$\cong \mathbb{K} \xrightarrow[1]{\quad} \mathbb{K} \rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow \mathbb{K} \xrightarrow[1]{\quad} \mathbb{K}$$

La donnée de la forme de Jordan générique d'une représentation

(Re)prenons le carquois suivant.

$$\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

(Re)prenons la représentation suivante.

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K}$$

$$\cong \mathbb{K} \xrightarrow[1]{\quad} \mathbb{K} \rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow \mathbb{K} \xrightarrow[1]{\quad} \mathbb{K}$$

Exercice : Décrire tous les endomorphismes nilpotents de X .

La donnée de la forme de Jordan générique d'une représentation

(Re)prenons le carquois suivant.

$$\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

(Re)prenons la représentation suivante.

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K}$$

$$\cong \mathbb{K} \xrightarrow[1]{\quad} \mathbb{K} \rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow \mathbb{K} \xrightarrow[1]{\quad} \mathbb{K}$$

Exercice : Décrire tous les endomorphismes nilpotents de X .

Soit $N = (N_1, N_2, N_3)$ un endomorphisme nilpotent de X .

La donnée de la forme de Jordan générique d'une représentation

(Re)prenons le carquois suivant.

$$\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

(Re)prenons la représentation suivante.

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K}$$

$$\cong \mathbb{K} \xrightarrow[1]{\quad} \mathbb{K} \rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow \mathbb{K} \xrightarrow[1]{\quad} \mathbb{K}$$

Exercice : Décrire tous les endomorphismes nilpotents de X .

Soit $N = (N_1, N_2, N_3)$ un endomorphisme nilpotent de X .

Il est facile de voir que $N_1 = N_3 = 0$.

La donnée de la forme de Jordan générique d'une représentation

(Re)prenons le carquois suivant.

$$\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$$

(Re)prenons la représentation suivante.

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K}$$

$$\cong \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K}$$

Exercice : Décrire tous les endomorphismes nilpotents de X .

Soit $N = (N_1, N_2, N_3)$ un endomorphisme nilpotent de X .

Il est facile de voir que $N_1 = N_3 = 0$.

Soit (x) , (y_1, y_2, y_3) et (z) des bases de respectivement X_1, X_2 et X_3 , adaptées à la décomposition de X en indécomposables, c'est-à-dire telles que $X_a(x) = y_1$, $X_b(y_3) = z$ et $X_b(y_1) = X_b(y_2) = 0$.

La donnée de la forme Jordan générique d'une représentation

La donnée de la forme Jordan générique d'une représentation

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K}$$

$$x \xrightarrow{X_a} y_1$$

$$y_2$$

$$y_3 \xrightarrow{X_b} z$$

La donnée de la forme Jordan générique d'une représentation

Nous avons :

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{[0 \ 0 \ 1]} \mathbb{K}$$

$$x \xrightarrow{X_a} y_1$$

$$y_2$$

$$y_3 \xrightarrow{X_b} z$$

La donnée de la forme Jordan générique d'une représentation

Nous avons :

- $\langle y_1 \rangle \subseteq \text{Ker}(N_2)$;

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{[0 \ 0 \ 1]} \mathbb{K}$$

$$x \xrightarrow{X_a} y_1$$

$$y_2$$

$$y_3 \xrightarrow{X_b} z$$

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{X_a} & y_1 \\ \vdots N_1 & & \vdots N_2 \\ 0 & \xrightarrow{X_a} & 0 \end{array}$$

La donnée de la forme Jordan générique d'une représentation

Nous avons :

- $\langle y_1 \rangle \subseteq \text{Ker}(N_2)$;

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{[0 \ 0 \ 1]} \mathbb{K}$$

$$x \xrightarrow{X_a} y_1$$

$$y_2$$

$$y_3 \xrightarrow{X_b} z$$

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{X_a} & y_1 \\ \vdots N_1 & & \vdots N_2 \\ 0 & \xrightarrow{X_a} & 0 \end{array}$$

- $\text{Im}(N_2) \subseteq \text{Ker}(X_b) = \langle y_1, y_2 \rangle$;

$$\begin{array}{ccc} y_i & \xrightarrow{X_b} & z \text{ ou } 0 \\ \vdots N_2 & & \vdots N_3 \\ N_2(y_i) & \xrightarrow{X_b} & 0 \end{array}$$

La donnée de la forme Jordan générique d'une représentation

Nous avons :

- $\langle y_1 \rangle \subseteq \text{Ker}(N_2)$;

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{[0 \ 0 \ 1]} \mathbb{K}$$

$$x \xrightarrow{X_a} y_1$$

y_2

$$y_3 \xrightarrow{X_b} z$$

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{X_a} & y_1 \\ \vdots N_1 & & \vdots N_2 \\ 0 & \xrightarrow{X_a} & 0 \end{array}$$

- $\text{Im}(N_2) \subseteq \text{Ker}(X_b) = \langle y_1, y_2 \rangle$;

$$\begin{array}{ccc} y_i & \xrightarrow{X_b} & z \text{ ou } 0 \\ \vdots N_2 & & \vdots N_3 \\ N_2(y_i) & \xrightarrow{X_b} & 0 \end{array}$$

- $N_2^3 = 0$.

La donnée de la forme Jordan générique d'une représentation

La donnée de la forme Jordan générique d'une représentation

Donc :

Donc :

- ◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡

La donnée de la forme Jordan générique d'une représentation

Donc :

- $N_2(y_1) = 0$;
- $N_2(y_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$;

La donnée de la forme Jordan générique d'une représentation

Donc :

- $N_2(y_1) = 0$;
- $N_2(y_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$;
- $N_2(y_3) = \gamma y_1 + \delta y_2$ avec $\gamma, \delta \in \mathbb{K}$.

La donnée de la forme Jordan générique d'une représentation

Donc :

- $N_2(y_1) = 0$;
- $N_2(y_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$;
- $N_2(y_3) = \gamma y_1 + \delta y_2$ avec $\gamma, \delta \in \mathbb{K}$.

De plus, comme $N_2^2(y_2) = \beta N_2(y_2)$, nous avons $\beta = 0$.

- $N_2(y_1) = 0$;
- $N_2(y_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$;
- $N_2(y_3) = \gamma y_1 + \delta y_2$ avec $\gamma, \delta \in \mathbb{K}$.

Nous concluons que les choix permis pour définir N_2 sont de la forme

La donnée de la forme Jordan générique d'une représentation

Donc :

- $N_2(y_1) = 0$;
- $N_2(y_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$;
- $N_2(y_3) = \gamma y_1 + \delta y_2$ avec $\gamma, \delta \in \mathbb{K}$.

De plus, comme $N_2^2(y_2) = \beta N_2(y_2)$, nous avons $\beta = 0$.

Nous concluons que les choix permis pour définir N_2 sont de la forme

$$N(\alpha, \gamma, \delta) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $N_2(y_1) = 0$;
- $N_2(y_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$;
- $N_2(y_3) = \gamma y_1 + \delta y_2$ avec $\gamma, \delta \in \mathbb{K}$.

Nous concluons que les choix permis pour définir N_2 sont de la forme

$$N(\alpha, \gamma, \delta) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Parmi tous les choix que nous pouvons faire de N_2 (et donc de N), Il existe un choix générique (un ensemble ouvert et dense) qui provient de restrictions génériques du type $\alpha, \delta \neq 0$ que nous pouvons naturellement imposer.

La donnée de la forme Jordan générique d'une représentation

Donc :

- $N_2(y_1) = 0$;
- $N_2(y_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$;
- $N_2(y_3) = \gamma y_1 + \delta y_2$ avec $\gamma, \delta \in \mathbb{K}$.

De plus, comme $N_2^2(y_2) = \beta N_2(y_2)$, nous avons $\beta = 0$.

Nous concluons que les choix permis pour définir N_2 sont de la forme

$$N(\alpha, \gamma, \delta) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Parmi tous les choix que nous pouvons faire de N_2 (et donc de N), Il existe un choix générique (un ensemble ouvert et dense) qui provient de restrictions génériques du type $\alpha, \delta \neq 0$ que nous pouvons naturellement imposer.

Donc la forme de Jordan d'un tel choix générique de N est $((1), (3), (1))$.

C'est cela que nous appellerons la *donnée de la forme de Jordan générique* de X .

La retrouvabilité de Jordan d'une catégorie

La donnée de la forme Jordan générique d'une représentation

Formulons la définition au propre.

La donnée de la forme Jordan générique d'une représentation

Formulons la définition au propre.

Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos et $\mathcal{Q}$ un carquois aimable fini connexe.

La donnée de la forme Jordan générique d'une représentation

Formulons la définition au propre.

Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos et $\mathcal{Q}$ un carquois aimable fini connexe.

Rappelons que $N \in \text{End}(X)$ est nilpotente si N_q l'est pour tout $q \in \mathcal{Q}_0$.

La donnée de la forme Jordan générique d'une représentation

Formulons la définition au propre.

Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos et $\mathcal{Q}$ un carquois aimable fini connexe.

Rappelons que $N \in \text{End}(X)$ est nilpotente si N_q l'est pour tout $q \in \mathcal{Q}_0$.

En considérant la forme de Jordan de chaque N_q , nous pouvons associer à N_q un partage d'entier $\lambda^q = (\lambda_1^q \geq \lambda_2^q \geq \dots \geq \lambda_k^q)$ qui enregistre la taille des blocs de Jordan dans la forme de Jordan de N_q . Notons que λ^q est un partage de l'entier $\dim X_q$.

La donnée de la forme Jordan générique d'une représentation

Formulons la définition au propre.

Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos et $\mathcal{Q}$ un carquois aimable fini connexe.

Rappelons que $N \in \text{End}(X)$ est nilpotente si N_q l'est pour tout $q \in \mathcal{Q}_0$.

En considérant la forme de Jordan de chaque N_q , nous pouvons associer à N_q un partage d'entier $\lambda^q = (\lambda_1^q \geq \lambda_2^q \geq \dots \geq \lambda_k^q)$ qui enregistre la taille des blocs de Jordan dans la forme de Jordan de N_q . Notons que λ^q est un partage de l'entier $\dim X_q$.

Ainsi nous pouvons enregistrer N via un $\#\mathcal{Q}_0$ -uplet de partages $\underline{\lambda} = (\lambda^q)_{q \in \mathcal{Q}_0}$

Sur les partages d'entier, nous allons considérer l'ordre de dominance.

La donnée de la forme Jordan générique d'une représentation

Sur les partages d'entier, nous allons considérer l'ordre de dominance.

Soit $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k)$ et $\mu = (\mu_1 \geq \dots \geq \mu_p)$ deux partage d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ ($\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n = \mu_1 + \dots + \mu_p$).

Soit $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k)$ et $\mu = (\mu_1 \geq \dots \geq \mu_p)$ deux partages d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ ($\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n = \mu_1 + \dots + \mu_p$).

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \lambda_1 + \dots + \lambda_i \leq \mu_1 + \dots + \mu_i$$

La donnée de la forme Jordan générique d'une représentation

Sur les partages d'entier, nous allons considérer l'ordre de dominance.

Soit $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k)$ et $\mu = (\mu_1 \geq \dots \geq \mu_p)$ deux partage d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$

$(\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n = \mu_1 + \dots + \mu_p)$.

Nous dirons que $\lambda \leq \mu$ si et seulement si :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \lambda_1 + \dots + \lambda_i \leq \mu_1 + \dots + \mu_i$$

Soit $\underline{\lambda} = (\lambda^1, \dots, \lambda^s)$ et $\underline{\mu} = (\mu^1, \dots, \mu^s)$ deux s -uplets de partages d'entiers tels que λ^j et μ^j sont des partages d'un même entier m_j .

La donnée de la forme Jordan générique d'une représentation

Sur les partages d'entier, nous allons considérer l'ordre de dominance.

Soit $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k)$ et $\mu = (\mu_1 \geq \dots \geq \mu_p)$ deux partages d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$

($\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n = \mu_1 + \dots + \mu_p$).

Nous dirons que $\lambda \leq \mu$ si et seulement si :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \lambda_1 + \dots + \lambda_i \leq \mu_1 + \dots + \mu_i$$

Soit $\underline{\lambda} = (\lambda^1, \dots, \lambda^s)$ et $\underline{\mu} = (\mu^1, \dots, \mu^s)$ deux s -uplets de partages d'entiers tels que λ^j et μ^j sont des partages d'un même entier m_j .

Nous dirons que $\underline{\lambda} \leq \underline{\mu}$ si et seulement si :

$$\forall j \in \{1, \dots, s\}, \lambda^j \leq \mu^j$$

La retrouvabilité de Jordan d'une catégorie

Théorème 19 [Garver-Patrias-Thomas '19]

Benjamin Dequêne (Montréal)	retrouvabilité de Jordan	Dijon, 16-18/03/2022	42 / 72
-----------------------------	--------------------------	----------------------	---------

Nous définissons la *donnée de la forme de Jordan générique* de X ($\text{GenJF}(X)$) comme étant la valeur maximale de JF dans $\text{NEnd}(X)$.

La donnée de la forme Jordan générique d'une représentation

Théorème 19 [Garver-Patrias-Thomas '19]

$\mathrm{NEnd}(X)$ est une variété algébrique irréductible. De plus, il existe une valeur maximale de JF sur $\mathrm{NEnd}(X)$ et elle est atteinte par un ensemble ouvert dense de $\mathrm{NEnd}(X)$

Définition 20

Nous définissons la *donnée de la forme de Jordan générique* de X ($\text{GenJF}(X)$) comme étant la valeur maximale de JF dans $\text{NEnd}(X)$.

Maintenant, une question centrale intéressante est :

La donnée de la forme Jordan générique d'une représentation

Théorème 19 [Garver-Patrias-Thomas '19]

$\text{NEnd}(X)$ est une variété algébrique irréductible. De plus, il existe une valeur maximale de JF sur $\text{NEnd}(X)$ et elle est atteinte par un ensemble ouvert dense de $\text{NEnd}(X)$

Définition 20

Nous définissons la *donnée de la forme de Jordan générique* de X ($\text{GenJF}(X)$) comme étant la valeur maximale de JF dans $\text{NEnd}(X)$.

Maintenant, une question centrale intéressante est :

« Pour quelles sous-catégories $\mathcal{C}$ de $\text{rep}(\mathcal{Q})$ pouvons-nous retrouver à isomorphisme près $X \in \mathcal{C}$ à partir de $\text{GenJF}(X)$? »

La retrouvabilité de Jordan d'une catégorie

La retrouvabilité de Jordan d'une catégorie

Par sous-catégories, nous parlerons de sous-catégories pleines stables par somme directe et par facteur direct.

La retrouvabilité de Jordan d'une catégorie

Par sous-catégories, nous parlerons de sous-catégories pleines stables par somme directe et par facteur direct.

Définition 21

Une sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $\text{rep}(\mathcal{Q})$ est dite *retrouvable de Jordan* si pour tout $\#Q_0$ -uplet $\underline{\lambda}$ il existe au plus une unique représentation (à isomorphisme près) $X \in \mathcal{C}$ telle que $\text{GenJF}(X) = \underline{\lambda}$

Par sous-catégories, nous parlerons de sous-catégories pleines stables par somme directe et par facteur direct.

Une sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $\text{rep}(\mathcal{Q})$ est dite *retrouvable de Jordan* si pour tout $\#Q_0$ -uplet $\underline{\lambda}$ il existe au plus une unique représentation (à isomorphisme près) $X \in \mathcal{C}$ telle que $\text{GenJF}(X) = \underline{\lambda}$

Par exemple, pour $Q = 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$:

Par sous-catégories, nous parlerons de sous-catégories pleines stables par somme directe et par facteur direct.

Définition 21

Une sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $\text{rep}(\mathcal{Q})$ est dite *retrouvable de Jordan* si pour tout $\#Q_0$ -uplet $\underline{\lambda}$ il existe au plus une unique représentation (à isomorphisme près) $X \in \mathcal{C}$ telle que $\text{GenJF}(X) = \underline{\lambda}$

Par exemple, pour $Q = 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$:

- $\mathcal{C} = \text{add}(\mathbb{K} \overset{\curvearrowright}{\underset{1}{\rightarrow}} \mathbb{K} \rightarrow 0, 0 \rightarrow \mathbb{K} \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 0, 0 \rightarrow \mathbb{K} \overset{\curvearrowright}{\underset{1}{\rightarrow}} \mathbb{K}) :$

La retrouvabilité de Jordan d'une catégorie

Par sous-catégories, nous parlerons de sous-catégories pleines stables par somme directe et par facteur direct.

Définition 21

Une sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $\text{rep}(\mathcal{Q})$ est dite *retrouvable de Jordan* si pour tout $\#Q_0$ -uplet $\underline{\lambda}$ il existe au plus une unique représentation (à isomorphisme près) $X \in \mathcal{C}$ telle que $\text{GenJF}(X) = \underline{\lambda}$

Par exemple, pour $\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$:

- $\mathcal{C} = \text{add}(\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xrightarrow{\quad} 0, 0 \xrightarrow{\quad} \mathbb{K} \xrightarrow{\quad} 0, 0 \xrightarrow{\quad} \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K})$: Cette catégorie est retrouvable de Jordan car les vecteurs dimensions des indécomposables qui engendrent cette catégorie forment une famille linéairement indépendante.

La retrouvabilité de Jordan d'une catégorie

Par sous-catégories, nous parlerons de sous-catégories pleines stables par somme directe et par facteur direct.

Définition 21

Une sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $\text{rep}(\mathcal{Q})$ est dite *retrouvable de Jordan* si pour tout $\#Q_0$ -uplet $\underline{\lambda}$ il existe au plus une unique représentation (à isomorphisme près) $X \in \mathcal{C}$ telle que $\text{GenJF}(X) = \underline{\lambda}$

Par exemple, pour $\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$:

- $\mathcal{C} = \text{add}(\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xrightarrow{\quad} 0, 0 \xrightarrow{\quad} \mathbb{K} \xrightarrow{\quad} 0, 0 \xrightarrow{\quad} \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K})$: Cette catégorie est retrouvable de Jordan car les vecteurs dimensions des indécomposables qui engendrent cette catégorie forment une famille linéairement indépendante.
- $\mathcal{C} = \text{rep}(\mathcal{Q})$:

Par sous-catégories, nous parlerons de sous-catégories pleines stables par somme directe et par facteur direct.

Une sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $\text{rep}(\mathcal{Q})$ est dite *retrouvable de Jordan* si pour tout $\#Q_0$ -uplet $\underline{\lambda}$ il existe au plus une unique représentation (à isomorphisme près) $X \in \mathcal{C}$ telle que $\text{GenJF}(X) = \underline{\lambda}$

Par exemple, pour $Q = 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$:

- $\mathcal{C} = \text{add}(\overset{\curvearrowright}{\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xrightarrow{\quad} 0}, \overset{\curvearrowright}{0 \xrightarrow{\quad} \mathbb{K} \xrightarrow{\quad} 0}, \overset{\curvearrowright}{0 \xrightarrow{\quad} \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K}})$: Cette catégorie est retrouvable de Jordan car les vecteurs dimensions des indécomposables qui engendrent cette catégorie forment une famille linéairement indépendante.
- $\mathcal{C} = \text{rep}(\mathcal{Q})$: Cette catégorie n'est pas retrouvable de Jordan. Par exemple, pour $Y = M(e_1) \oplus M(e_2)^3 \oplus M(e_3)$, nous avons $\text{GenJF}(Y) = ((1), (3), (1))$.

La retrouvabilité de Jordan d'une catégorie

Par sous-catégories, nous parlerons de sous-catégories pleines stables par somme directe et par facteur direct.

Définition 21

Une sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $\text{rep}(\mathcal{Q})$ est dite *retrouvable de Jordan* si pour tout $\#Q_0$ -uplet $\underline{\lambda}$ il existe au plus une unique représentation (à isomorphisme près) $X \in \mathcal{C}$ telle que $\text{GenJF}(X) = \underline{\lambda}$

Par exemple, pour $\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$:

- $\mathcal{C} = \text{add}(\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xrightarrow{\quad} 0, 0 \xrightarrow{\quad} \mathbb{K} \xrightarrow{\quad} 0, 0 \xrightarrow{\quad} \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K})$: Cette catégorie est retrouvable de Jordan car les vecteurs dimensions des indécomposables qui engendrent cette catégorie forment une famille linéairement indépendante.
- $\mathcal{C} = \text{rep}(\mathcal{Q})$: Cette catégorie n'est pas retrouvable de Jordan. Par exemple, pour $Y = M(e_1) \oplus M(e_2)^3 \oplus M(e_3)$, nous avons $\text{GenJF}(Y) = ((1), (3), (1))$.

En générale, il n'est pas évident de savoir si une catégorie est retrouvable de Jordan...

Plan

① Connaissances de bases

Algèbres aimables

Représentations / Modules sur une algèbre aimable

② Combinatoire des cordes et des bandes

Représentations de corde

Représentations de bande

Représentations indécomposables

Structure des morphismes entre les représentations

③ La retrouvabilité (canonique) de Jordan

La retrouvabilité de Jordan d'une catégorie

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Une classe de sous-catégories intéressante

④ Résultats principaux / Aller plus loin

Résultats principaux

Aller plus loin

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Existe-t-il une méthode pour retrouver une représentation X étant donné $\text{GenJF}(X)$?

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Existe-t-il une méthode pour retrouver une représentation X étant donné $\text{GenJF}(X)$?
Voyons avec notre exemple précédent.

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Existe-t-il une méthode pour retrouver une représentation X étant donné $\text{GenJF}(X)$?
Voyons avec notre exemple précédent.

Reprenons le carquois $\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$ et $X = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K}$.

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Existe-t-il une méthode pour retrouver une représentation X étant donné $\text{GenJF}(X)$?
Voyons avec notre exemple précédent.

Reprenons le carquois $\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$ et $X = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K}$.

Exercice : Décrire les représentations de $\mathcal{Q}$ qui ont la même donnée de Jordan générique que X .

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Existe-t-il une méthode pour retrouver une représentation X étant donné $\text{GenJF}(X)$?
Voyons avec notre exemple précédent.

Reprenons le carquois $\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$ et $X = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K}$.

Exercice : Décrire les représentations de $\mathcal{Q}$ qui ont la même donnée de Jordan générique que X .
Considérons $Y \in \text{rep } \mathcal{Q}$ telle que $\text{GenJF}(Y) = \text{GenJF}(X) = ((1), (3), (1))$. Soit $N = (N_1, N_2, N_3)$ un endomorphisme nilpotent de Y tel que $\text{GenJF}(Y) = \text{JF}(N)$.

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Existe-t-il une méthode pour retrouver une représentation X étant donné $\text{GenJF}(X)$?
Voyons avec notre exemple précédent.

Reprenons le carquois $\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$ et $X = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{[0 \ 0 \ 1]} \mathbb{K}$.

Exercice : Décrire les représentations de $\mathcal{Q}$ qui ont la même donnée de Jordan générique que X .
Considérons $Y \in \text{rep } \mathcal{Q}$ telle que $\text{GenJF}(Y) = \text{GenJF}(X) = ((1), (3), (1))$. Soit $N = (N_1, N_2, N_3)$ un endomorphisme nilpotent de Y tel que $\text{GenJF}(Y) = \text{JF}(N)$.
Nous savons alors que Y est de la forme :

$$\mathbb{K} \xrightarrow{Y_a} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{Y_b} \mathbb{K}$$

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Existe-t-il une méthode pour retrouver une représentation X étant donné $\text{GenJF}(X)$?
Voyons avec notre exemple précédent.

Reprenons le carquois $\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow[a]{\quad} 2 \xrightarrow[b]{\quad} 3$ et $X = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{[0 \ 0 \ 1]} \mathbb{K}$.

Exercice : Décrire les représentations de $\mathcal{Q}$ qui ont la même donnée de Jordan générique que X .
Considérons $Y \in \text{rep } \mathcal{Q}$ telle que $\text{GenJF}(Y) = \text{GenJF}(X) = ((1), (3), (1))$. Soit $N = (N_1, N_2, N_3)$ un endomorphisme nilpotent de Y tel que $\text{GenJF}(Y) = \text{JF}(N)$.
Nous savons alors que Y est de la forme :

$$\mathbb{K} \xrightarrow[Y_a]{\quad} \mathbb{K}^3 \xrightarrow[Y_b]{\quad} \mathbb{K}$$

Soit (x) , (y_3, y_2, y_1) et (z) des bases respectives de Y_1 , Y_2 et Y_3 adaptée à chaque N_q .

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Existe-t-il une méthode pour retrouver une représentation X étant donné $\text{GenJF}(X)$?
Voyons avec notre exemple précédent.

Reprenons le carquois $\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$ et $X = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{[0 \ 0 \ 1]} \mathbb{K}$.

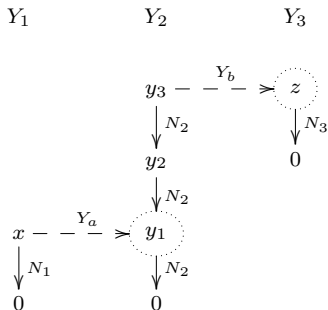
Exercice : Décrire les représentations de $\mathcal{Q}$ qui ont la même donnée de Jordan générique que X .
Considérons $Y \in \text{rep } \mathcal{Q}$ telle que $\text{GenJF}(Y) = \text{GenJF}(X) = ((1), (3), (1))$. Soit $N = (N_1, N_2, N_3)$ un endomorphisme nilpotent de Y tel que $\text{GenJF}(Y) = \text{JF}(N)$.
Nous savons alors que Y est de la forme :

$$\mathbb{K} \xrightarrow{Y_a} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{Y_b} \mathbb{K}$$

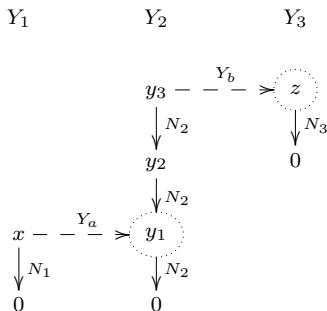
Soit (x) , (y_3, y_2, y_1) et (z) des bases respectives de Y_1 , Y_2 et Y_3 adaptée à chaque N_q .
Remarquons tout de suite que $N_1 = 0 = N_3$.

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

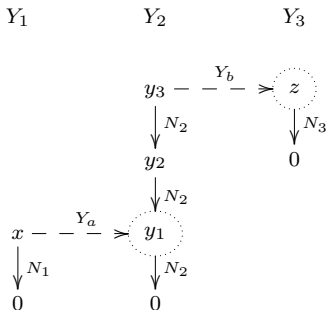


La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie



Par les relations de carrés commutatifs ($Y_a N_1 = N_2 Y_a$ et $Y_b N_2 = N_3 Y_c$), nous avons :

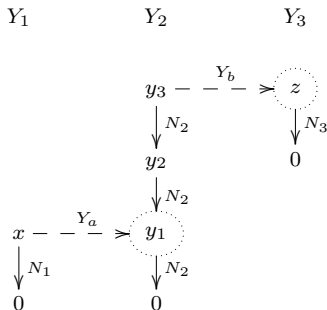
La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie



Par les relations de carrés commutatifs ($Y_a N_1 = N_2 Y_a$ et $Y_b N_2 = N_3 Y_c$), nous avons :

- $Y_a(x) = \alpha' y_1$ pour un $\alpha' \in \mathbb{K}$;

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie



Par les relations de carrés commutatifs ($Y_a N_1 = N_2 Y_a$ et $Y_b N_2 = N_3 Y_c$), nous avons :

- $Y_a(x) = \alpha' y_1$ pour un $\alpha' \in \mathbb{K}$;
- $Y_b(y_1) = Y_b(y_2) = 0$ et $Y_b(y_3) = \beta' z$ pour un $\beta' \in \mathbb{K}$.

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Ainsi parmi tous les choix que nous pouvons faire de Y_a et de Y_b (et donc de Y), Il existe un choix générique provenant de restrictions génériques $\alpha', \beta' \neq 0$.

Ainsi parmi tous les choix que nous pouvons faire de Y_a et de Y_b (et donc de Y), Il existe un choix générique provenant de restrictions génériques $\alpha', \beta' \neq 0$.
Par conséquent $Y \cong X$. Nous avons retrouvé X .

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Ainsi parmi tous les choix que nous pouvons faire de Y_a et de Y_b (et donc de Y), Il existe un choix générique provenant de restrictions génériques $\alpha', \beta' \neq 0$.
Par conséquent $Y \cong X$. Nous avons retrouvé X .

Cette technique se généralise, et appelle à une notion plus forte que la retrouvabilité de Jordan.

Ainsi parmi tous les choix que nous pouvons faire de Y_a et de Y_b (et donc de Y), Il existe un choix générique provenant de restrictions génériques $\alpha', \beta' \neq 0$.

Cette technique se généralise, et appelle à une notion plus forte que la retrouvabilité de Jordan. En effet, nous n'avons pas retrouvé la représentation $Z = M(e_1) \oplus M(e_2)^3 \oplus M(e_3)$ qui pourtant vérifie $\text{GenJF}(Z) = ((1), (3), (1))$.

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Notons $\text{rep}(\mathcal{Q}, \underline{\lambda})$ l'ensemble des représentations Y tels que :

- λ^q est un partage de $\dim Y_q$ pour tout $q \in Q_0$;

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Notons $\text{rep}(\mathcal{Q}, \underline{\lambda})$ l'ensemble des représentations Y tels que :

- λ^q est un partage de $\dim Y_q$ pour tout $q \in Q_0$;
- Y admet un endomorphisme nilpotent N tel que $JF(N) = \underline{\lambda}$.

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Notons $\text{rep}(\mathcal{Q}, \lambda)$ l'ensemble des représentations Y tels que :

- λ^q est un partage de $\dim Y_q$ pour tout $q \in Q_0$;
- Y admet un endomorphisme nilpotent N tel que $JF(N) = \lambda$.

Définition 22

Une sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $\text{rep}(\mathcal{Q})$ est dite *canoniquement retrouvable de Jordan* si pour tout $X \in \mathcal{C}$, il existe un ensemble ouvert dense $O \subset \text{rep}(\mathcal{Q}, \text{GenJF}(X))$ tel que toutes les représentations de O sont isomorphes à X .

Notons $\text{rep}(\mathcal{Q}, \lambda)$ l'ensemble des représentations Y tels que :

- λ^q est un partage de $\dim Y_q$ pour tout $q \in Q_0$;
- Y admet un endomorphisme nilpotent N tel que $JF(N) = \lambda$.

Une sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $\text{rep}(\mathcal{Q})$ est dite *canoniquement retrouvable de Jordan* si pour tout $X \in \mathcal{C}$, il existe un ensemble ouvert dense $O \subset \text{rep}(\mathcal{Q}, \text{GenJF}(X))$ tel que toutes les représentations de O sont isomorphes à X .

Par exemple, pour $Q = 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$:

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Notons $\text{rep}(\mathcal{Q}, \underline{\lambda})$ l'ensemble des représentations Y tels que :

- λ^q est un partage de $\dim Y_q$ pour tout $q \in Q_0$;
- Y admet un endomorphisme nilpotent N tel que $\text{JF}(N) = \underline{\lambda}$.

Définition 22

Une sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $\text{rep}(\mathcal{Q})$ est dite *canoniquement retrouvable de Jordan* si pour tout $X \in \mathcal{C}$, il existe un ensemble ouvert dense $O \subset \text{rep}(\mathcal{Q}, \text{GenJF}(X))$ tel que toutes les représentations de O sont isomorphes à X .

Par exemple, pour $\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$:

- $\mathcal{C} = \text{add}(\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xrightarrow{\quad} 0, 0 \xrightarrow{\quad} \mathbb{K} \xrightarrow{\quad} 0, 0 \xrightarrow{\quad} \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K})$:

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Notons $\text{rep}(\mathcal{Q}, \underline{\lambda})$ l'ensemble des représentations Y tels que :

- λ^q est un partage de $\dim Y_q$ pour tout $q \in Q_0$;
- Y admet un endomorphisme nilpotent N tel que $\text{JF}(N) = \underline{\lambda}$.

Définition 22

Une sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $\text{rep}(\mathcal{Q})$ est dite *canoniquement retrouvable de Jordan* si pour tout $X \in \mathcal{C}$, il existe un ensemble ouvert dense $O \subset \text{rep}(\mathcal{Q}, \text{GenJF}(X))$ tel que toutes les représentations de O sont isomorphes à X .

Par exemple, pour $\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$:

- $\mathcal{C} = \text{add}(\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xrightarrow{\quad} 0, 0 \xrightarrow{\quad} \mathbb{K} \xrightarrow{\quad} 0, 0 \xrightarrow{\quad} \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K})$: Cette catégorie est canoniquement retrouvable de Jordan. Le raisonnement générale est assez proche de ce que nous avons fait précédemment.

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Notons $\text{rep}(\mathcal{Q}, \underline{\lambda})$ l'ensemble des représentations Y tels que :

- λ^q est un partage de $\dim Y_q$ pour tout $q \in Q_0$;
- Y admet un endomorphisme nilpotent N tel que $\text{JF}(N) = \underline{\lambda}$.

Définition 22

Une sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $\text{rep}(\mathcal{Q})$ est dite *canoniquement retrouvable de Jordan* si pour tout $X \in \mathcal{C}$, il existe un ensemble ouvert dense $O \subset \text{rep}(\mathcal{Q}, \text{GenJF}(X))$ tel que toutes les représentations de O sont isomorphes à X .

Par exemple, pour $\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$:

- $\mathcal{C} = \text{add}(\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xrightarrow{\quad} 0, 0 \xrightarrow{\quad} \mathbb{K} \xrightarrow{\quad} 0, 0 \xrightarrow{\quad} \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K})$: Cette catégorie est canoniquement retrouvable de Jordan. Le raisonnement générale est assez proche de ce que nous avons fait précédemment.
- $\mathcal{C} = \text{add}(M(e_1), M(e_2), M(e_3))$:

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Notons $\text{rep}(\mathcal{Q}, \underline{\lambda})$ l'ensemble des représentations Y tels que :

- λ^q est un partage de $\dim Y_q$ pour tout $q \in \mathcal{Q}_0$;
- Y admet un endomorphisme nilpotent N tel que $\text{JF}(N) = \underline{\lambda}$.

Définition 22

Une sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $\text{rep}(\mathcal{Q})$ est dite *canoniquement retrouvable de Jordan* si pour tout $X \in \mathcal{C}$, il existe un ensemble ouvert dense $O \subset \text{rep}(\mathcal{Q}, \text{GenJF}(X))$ tel que toutes les représentations de O sont isomorphes à X .

Par exemple, pour $\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$:

- $\mathcal{C} = \text{add}(\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xrightarrow{\quad} 0, 0 \xrightarrow{\quad} \mathbb{K} \xrightarrow{\quad} 0, 0 \xrightarrow{\quad} \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K})$: Cette catégorie est canoniquement retrouvable de Jordan. Le raisonnement générale est assez proche de ce que nous avons fait précédemment.
- $\mathcal{C} = \text{add}(M(e_1), M(e_2), M(e_3))$: Cette catégorie est retrouvable de Jordan, mais pas canoniquement retrouvable de Jordan par ce que nous avons mis en lumière précédemment.

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Remarques 23

Remarques 23

- Une catégorie canoniquement retrouvable de Jordan est retrouvable de Jordan.

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Remarques 23

- Une catégorie canoniquement retrouvable de Jordan est retrouvable de Jordan.
- Pour certaines valeurs de $\underline{\lambda}$, il est possible qu'il n'y ait pas d'ouvert dense O dans $\text{rep}(\mathcal{Q}, \underline{\lambda})$ telle que toutes les représentations de cet ouvert sont isomorphes entre elles, et donc qu'il n'y ait pas de choix générique.

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Remarques 23

- Une catégorie canoniquement retrouvable de Jordan est retrouvable de Jordan.
- Pour certaines valeurs de $\underline{\lambda}$, il est possible qu'il n'y ait pas d'ouvert dense O dans $\text{rep}(\mathcal{Q}, \underline{\lambda})$ telle que toutes les représentations de cet ouvert sont isomorphes entre elles, et donc qu'il n'y ait pas de choix générique.

- Reprenons le carquois $\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow{\quad} 2$

Dans $\text{rep}(\mathcal{Q}, \underline{\lambda} = ((1), (1)))$, nous avons les représentations indécomposables (à isomorphisme près) suivantes :

$$\mathbb{K} \xrightleftharpoons[1]{0} \mathbb{K} \qquad \mathbb{K} \xrightleftharpoons[\alpha]{1} \mathbb{K} \quad (\alpha \in \mathbb{K})$$

Si nous essayons de faire un choix générique de Y tel que $\text{GenJF}(Y) = ((1), (1))$, nous n'y parviendrons pas. Chaque valeur de α nous donne une classe d'isomorphismes de représentations différente. Donc chaque valeur α spécifique est exceptionnelle. C'est ce qui explique que nous n'avons pas de choix générique d'une représentation Y dans $\text{rep}(\mathcal{Q}, \underline{\lambda} = ((1), (1)))$;

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Remarques 23 (suite)

- Pour $\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$, si nous essayons de considérer un choix générique de Y dans $\text{rep}(\mathcal{Q}, ((1), (1), (1)))$, comme nous avons à respecter la relation $Y_b Y_a = 0$ et que l'endomorphisme nilpotente ne donne aucune restriction, nous avons deux choix de classes d'isomorphismes de représentation qui sont possibles :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \xrightarrow{1} & \mathbb{K} \xrightarrow{0} \mathbb{K} \\ \text{↗} & & \text{↘} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \xrightarrow{0} & \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \\ \text{↗} & & \text{↘} \end{array}$$

Mais il n'y a aucune raison de privilégier un choix plutôt qu'un autre : les ensembles ouverts en jeu ne sont pas denses dans $\text{rep}(\mathcal{Q}, ((1), (1), (1)))$. Donc, il n'y a pas de choix générique.

Plan

① Connaissances de bases

Algèbres aimables

Représentations / Modules sur une algèbre aimable

② Combinatoire des cordes et des bandes

Représentations de corde

Représentations de bande

Représentations indécomposables

Structure des morphismes entre les représentations

③ La retrouvabilité (canonique) de Jordan

La retrouvabilité de Jordan d'une catégorie

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Une classe de sous-catégories intéressante

④ Résultats principaux / Aller plus loin

Résultats principaux

Aller plus loin

Les catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$

Les catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$

Définition 24

Soit $m \in Q_0$. Nous définissons $\mathcal{C}_{Q,m}$ la catégorie additivement engendrée par les représentations X indécomposables tels que $\dim X_m \geq 1$.

Les catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$

Définition 24

Soit $m \in Q_0$. Nous définissons $\mathcal{C}_{Q,m}$ la catégorie additivement engendrée par les représentations X indécomposables tels que $\dim X_m \geq 1$.

Pour $Q = 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$:

$$\mathcal{C}_{Q,2} = \text{add}(\mathbb{K} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \xrightarrow{1} \mathbb{K} \end{array} \rightarrow 0, 0 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \xrightarrow{} \mathbb{K} \end{array} \rightarrow 0, 0 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \xrightarrow{} \mathbb{K} \end{array} \xrightarrow{1} \mathbb{K})$$

Les catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$

Définition 24

Soit $m \in Q_0$. Nous définissons $\mathcal{C}_{Q,m}$ la catégorie additivement engendrée par les représentations X indécomposables tels que $\dim X_m \geq 1$.

Pour $Q = 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$:

$$\mathcal{C}_{Q,2} = \text{add} \left(\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xrightarrow{\quad} 0, 0 \xrightarrow{\quad} \mathbb{K} \xrightarrow{\quad} 0, 0 \xrightarrow{\quad} \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \right)$$

Une propriété sur les sommets du carquois va avoir un intérêt particulier dans ce qui va suivre...

Les catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$

Définition 24

Soit $m \in Q_0$. Nous définissons $\mathcal{C}_{Q,m}$ la catégorie additivement engendrée par les représentations X indécomposables tels que $\dim X_m \geq 1$.

Pour $Q = 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$:

$$\mathcal{C}_{Q,2} = \text{add}(\mathbb{K} \overset{\curvearrowright}{\underset{1}{\rightrightarrows}} \mathbb{K} \rightarrow 0, 0 \rightarrow \mathbb{K} \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 0, 0 \rightarrow \mathbb{K} \overset{\curvearrowright}{\underset{1}{\rightrightarrows}} \mathbb{K})$$

Une propriété sur les sommets du carquois va avoir un intérêt particulier dans ce qui va suivre...

Définition 25

Un sommet m est dit *minuscule* si et seulement si toute représentation indécomposable $X \in \text{rep}(\mathcal{Q})$ est telle que $\dim X_m \leq 1$.

Une classe de sous-catégories intéressante

Les catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$

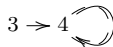
Les catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$

Jouons à un petit jeu.

Les catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$

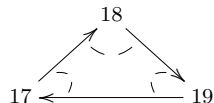
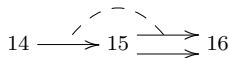
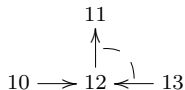
Jouons à un petit jeu.

$$1 \Rightarrow 2$$



$$5 \rightarrow 6 \rightarrow 7$$

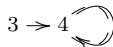
$$8 \rightrightarrows 9$$



Les catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$

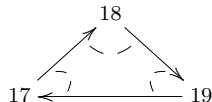
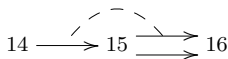
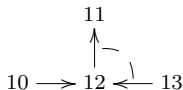
Jouons à un petit jeu.

$$1 \Rightarrow 2$$



$$5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 7$$

$$8 \rightrightarrows 9$$

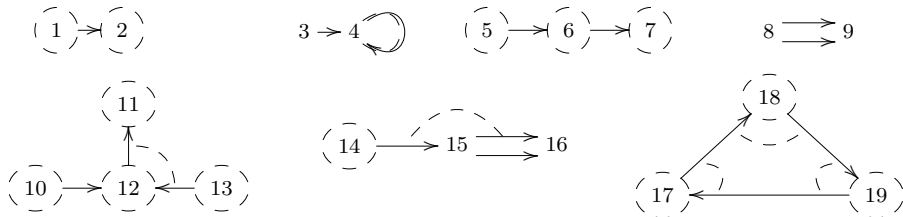


1) Lesquels de ces sommets sont **minuscules** ?

Les catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$

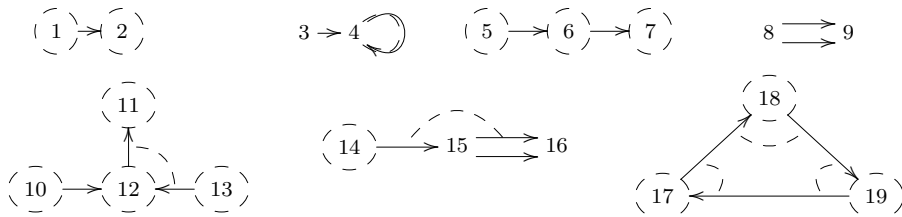
Les catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$

Réponse :



Les catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$

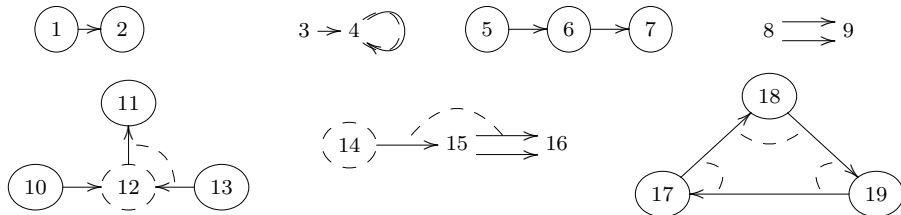
Réponse :

2) Pour quels sommets m avons-nous $\mathcal{C}_{Q,m}$ **retrouvable de Jordan** ?

Les catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$

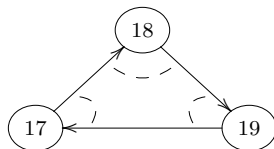
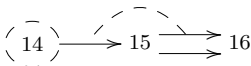
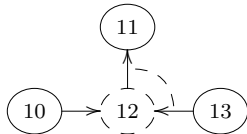
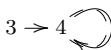
Les catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$

Réponse :



Les catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$

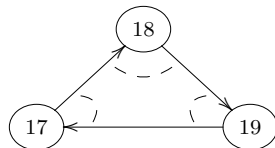
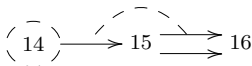
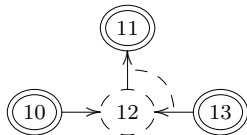
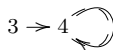
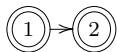
Réponse :

3) Pour quels sommets m avons-nous $\mathcal{C}_{Q,m}$ **canoniquement retrouvable de Jordan** ?

Les catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$

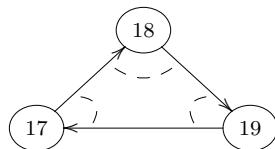
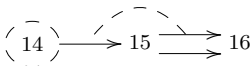
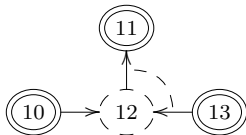
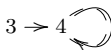
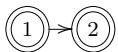
Les catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$

Réponse :



Les catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$

Réponse :



Focalisons-nous un peu sur certains de ces carquois...

Résultats connus et observations sur les $\mathcal{C}_{Q,m}$

Résultats connus et observations sur les $\mathcal{C}_{Q,m}$

Un résultat déjà connu sur les carquois de type Dynkin permet de répondre pour les carquois de type A_n .

Résultats connus et observations sur les $\mathcal{C}_{Q,m}$

Un résultat déjà connu sur les carquois de type Dynkin permet de répondre pour les carquois de type A_n .

Théorème 26 [Garver-Patrias-Thomas '19]

Si Q est un carquois de type ADE de Dynkin, et si m est minuscule, alors $\mathcal{C}_{Q,m}$ est canoniquement retrouvable de Jordan.

Résultats connus et observations sur les $\mathcal{C}_{Q,m}$

Un résultat déjà connu sur les carquois de type Dynkin permet de répondre pour les carquois de type A_n .

Théorème 26 [Garver-Patrias-Thomas '19]

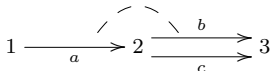
Si Q est un carquois de type ADE de Dynkin, et si m est minuscule, alors $\mathcal{C}_{Q,m}$ est canoniquement retrouvable de Jordan.

Pour les carquois de type A_n , tous les sommets sont minuscules, et donc toutes les catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$ sont canoniquement retrouvables de Jordan.

Résultats connus et observations sur les $\mathcal{C}_{Q,m}$

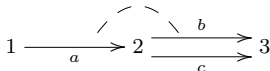
Résultats connus et observations sur les $\mathcal{C}_{Q,m}$

Reprenons le carquois suivant



Résultats connus et observations sur les $\mathcal{C}_{Q,m}$

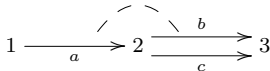
Reprenons le carquois suivant



Le sommet 1 est minuscule.

Résultats connus et observations sur les $\mathcal{C}_{Q,m}$

Reprenons le carquois suivant



Le sommet 1 est minuscule. Si nous prenons les représentations suivantes :

Résultats connus et observations sur les $\mathcal{C}_{Q,m}$

$$\begin{aligned}
 X = \underbrace{\mathbb{K} \xrightarrow{\quad} 0 \xrightarrow{\quad} 0}_{=M(1)} \oplus \mathbb{K} \xrightarrow{\quad} \mathbb{K}^2 \xrightarrow{\quad} \mathbb{K}^2 \\
 \begin{array}{c} \text{Dashed arc from } \mathbb{K} \text{ to } 0 \\ \text{Dashed arc from } 0 \text{ to } \mathbb{K}^2 \end{array} \\
 \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \\
 =M \left(\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ & \searrow^a & & & \\ & 2 & & & \\ & & \searrow^c & & \\ & & 3 & & \\ & & & \swarrow^b & \\ & & & 2 & \\ & & & & \searrow^c \\ & & & & 3 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Résultats connus et observations sur les $\mathcal{C}_{Q,m}$

$$\begin{aligned}
 X = & \underbrace{\mathbb{K} \xrightarrow{\quad} 0 \xrightarrow{\quad} 0}_{=M(1)} \oplus \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^2 \\
 & = M \left(\begin{array}{c} 1 \searrow^a 2 \searrow^c 3 \\ \searrow^b 3 \end{array} \right) \\
 Y = & \underbrace{(\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xrightarrow[1]{0} \mathbb{K})^2}_{M \left(\begin{array}{c} 1 \searrow^a 2 \searrow^c 3 \end{array} \right)}
 \end{aligned}$$

Résultats connus et observations sur les $\mathcal{C}_{Q,m}$

$$\begin{aligned}
 X = & \underbrace{\mathbb{K} \xrightarrow{\quad} 0 \xrightarrow{\quad} 0}_{=M(1)} \oplus \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^2 \\
 & = M \left(\begin{array}{c} 1 \searrow^a 2 \searrow^c 3 \\ \searrow^b 3 \end{array} \right) \\
 Y = & \underbrace{(\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xrightarrow[1]{0} \mathbb{K})^2}_{M \left(\begin{array}{c} 1 \searrow^a 2 \searrow^c 3 \end{array} \right)}
 \end{aligned}$$

Alors nous obtenons $\text{GenJF}(X) = \text{GenJF}(Y) = ((2), (2), (2))$

Résultats connus et observations sur les $\mathcal{C}_{Q,m}$

Résultats connus et observations sur les $\mathcal{C}_{Q,m}$

Reprenons le carquois suivant.

$$Q = \begin{array}{ccccc} & & 4 & & \\ & & \uparrow & & \\ & b & | & \text{---} & \\ 1 & \xrightarrow{a} & 2 & \xleftarrow{c} & 3 \end{array}$$

Résultats connus et observations sur les $\mathcal{C}_{Q,m}$

Reprenons le carquois suivant.

$$Q = \begin{array}{ccccc} & & 4 & & \\ & & \uparrow & & \\ & b & | & \swarrow & \\ 1 & \xrightarrow{a} & 2 & \xleftarrow{c} & 3 \end{array}$$

Tous les sommets sont minuscules.

Résultats connus et observations sur les $\mathcal{C}_{Q,m}$

Reprenons le carquois suivant.

$$Q = \begin{array}{c} 4 \\ \uparrow b \\ 1 \xrightarrow{a} 2 \xleftarrow{c} 3 \end{array}$$

Tous les sommets sont minuscules. Si nous prenons, dans $\mathcal{C}_{Q,2}$:

- $X = M \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow^b \\ 4 \end{array} \right) \oplus M \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow^a \\ 2 \end{array} \right) \oplus M \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow^a \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \nearrow^c \\ 3 \end{array} \right) \oplus M \left(\begin{array}{c} 3 \\ \searrow^c \\ 2 \end{array} \right) ;$

Résultats connus et observations sur les $\mathcal{C}_{Q,m}$

Reprenons le carquois suivant.

$$Q = \begin{array}{c} 4 \\ \uparrow b \\ 1 \xrightarrow{a} 2 \xleftarrow{c} 3 \end{array}$$

Tous les sommets sont minuscules. Si nous prenons, dans $\mathcal{C}_{Q,2}$:

- $X = M \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow^b \\ 4 \end{array} \right) \oplus M \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow^a \\ 2 \end{array} \right) \oplus M \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow^a \\ 2 \end{array} \swarrow_c^3 \right) \oplus M \left(\begin{array}{c} 3 \\ \searrow^c \\ 2 \end{array} \right) ;$
- $X' = M \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow^a \\ 2 \\ \searrow^b \\ 4 \end{array} \right) \oplus M(2) \oplus M \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow^a \\ 2 \end{array} \swarrow_c^3 \right) \oplus M \left(\begin{array}{c} 3 \\ \searrow^c \\ 2 \end{array} \right) ;$

Résultats connus et observations sur les $\mathcal{C}_{Q,m}$

Reprenons le carquois suivant.

$$Q = \begin{array}{ccccc} & & 4 & & \\ & & \uparrow & \searrow & \\ & b & | & & \\ 1 & \xrightarrow{a} & 2 & \xleftarrow{c} & 3 \end{array}$$

Tous les sommets sont minuscules. Si nous prenons, dans $\mathcal{C}_{Q,2}$:

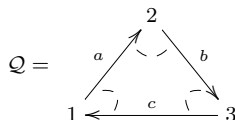
- $X = M \left(\begin{array}{ccc} 2 & & \\ & \searrow^b & \\ & & 4 \end{array} \right) \oplus M \left(\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \searrow^a & \\ & & 2 \end{array} \right) \oplus M \left(\begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ & \searrow^a & \swarrow_c \\ & 2 & \end{array} \right) \oplus M \left(\begin{array}{ccc} 3 & & \\ & \searrow^c & \\ & & 2 \end{array} \right);$
- $X' = M \left(\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \searrow^a & \\ & & 2 \\ & & \searrow_b \\ & & & 4 \end{array} \right) \oplus M(2) \oplus M \left(\begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ & \searrow^a & \swarrow_c \\ & 2 & \end{array} \right) \oplus M \left(\begin{array}{ccc} 3 & & \\ & \searrow^c & \\ & & 2 \end{array} \right);$

Nous obtenons $\text{GenJF}(X) = \text{GenJF}(X') = ((2), (3, 1), (2), (1))$.

Résultats connus et observations sur les $\mathcal{C}_{Q,m}$

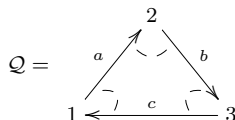
Résultats connus et observations sur les $\mathcal{C}_{Q,m}$

Reprenons le carquois suivant :



Résultats connus et observations sur les $\mathcal{C}_{Q,m}$

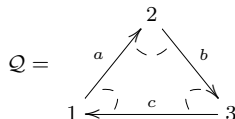
Reprenons le carquois suivant :



Il est assez simple de noter que la catégorie $\mathcal{C}_{Q,m}$ est retrouvable de Jordan pour $m \in \{1, 2, 3\}$.

Résultats connus et observations sur les $\mathcal{C}_{Q,m}$

Reprenons le carquois suivant :

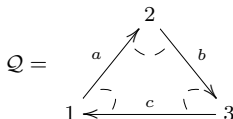


Il est assez simple de noter que la catégorie $\mathcal{C}_{Q,m}$ est retrouvable de Jordan pour $m \in \{1, 2, 3\}$.

En prenant $X = M \begin{pmatrix} 1 & \\ & \searrow^a \\ & 2 \end{pmatrix} \oplus M \begin{pmatrix} 2 & \\ & \searrow^b \\ & 3 \end{pmatrix}$, nous obtenons $\text{GenJF}(X) = ((1), (2), (1))$.

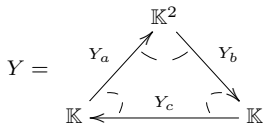
Résultats connus et observations sur les $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$

Reprenons le carquois suivant :



Il est assez simple de noter que la catégorie $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ est retrouvable de Jordan pour $m \in \{1, 2, 3\}$.

En prenant $X = M \begin{pmatrix} 1 & \\ & \searrow^a \\ & 2 \end{pmatrix} \oplus M \begin{pmatrix} 2 & \\ & \searrow^b \\ & 3 \end{pmatrix}$, nous obtenons $\text{GenJF}(X) = ((1), (2), (1))$.



Dans $\text{rep}(\mathcal{Q}, \text{GenJF}(X))$, il y a des représentations Y telles que $Y_c \neq 0$. Ce qui contredirait le fait qu'il existerait un ensemble ouvert dense O dans $\text{rep}(\mathcal{Q}, \text{GenJF}(X))$ tel que tout $Y \in O$ est isomorphe à X .

Plan

① Connaissances de bases

Algèbres aimables

Représentations / Modules sur une algèbre aimable

② Combinatoire des cordes et des bandes

Représentations de corde

Représentations de bande

Représentations indécomposables

Structure des morphismes entre les représentations

③ La retrouvabilité (canonique) de Jordan

La retrouvabilité de Jordan d'une catégorie

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Une classe de sous-catégories intéressante

④ Résultats principaux / Aller plus loin

Résultats principaux

Aller plus loin

Résultats

Résultats

Théorème 27 [D. '21+]

Soit $\mathcal{Q} = (Q, I)$ un carquois aimable fini connexe et $m \in Q_0$. La sous-catégorie $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}, m}$ est canoniquement retrouvable de Jordan si et seulement si m vérifie les condition suivantes :

Résultats

Théorème 27 [D. '21+]

Soit $\mathcal{Q} = (Q, I)$ un carquois aimable fini connexe et $m \in Q_0$. La sous-catégorie $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}, m}$ est canoniquement retrouvable de Jordan si et seulement si m vérifie les condition suivantes :

- (i) Pour tout couple de cordes ρ et ν passant par m , il n'existe pas de flèches $\alpha \in Q_1$ telle que $\alpha \notin \text{Supp}_1(\rho) \cup \text{Supp}_1(\nu)$, $s(\alpha) \in \text{Supp}_0(\rho)$ et $t(\alpha) \in \text{Supp}_0(\nu)$;

Théorème 27 [D. '21+]

- (i) Pour tout couple de cordes ρ et ν passant par m , il n'existe pas de flèches $\alpha \in Q_1$ telle que $\alpha \notin \text{Supp}_1(\rho) \cup \text{Supp}_1(\nu)$, $s(\alpha) \in \text{Supp}_0(\rho)$ et $t(\alpha) \in \text{Supp}_0(\nu)$;
- (ii) Au moins une des conditions suivantes est satisfaite :

Résultats

Théorème 27 [D. '21+]

Soit $\mathcal{Q} = (Q, I)$ un carquois aimable fini connexe et $m \in Q_0$. La sous-catégorie $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}, m}$ est canoniquement retrouvable de Jordan si et seulement si m vérifie les condition suivantes :

- (i) Pour tout couple de cordes ρ et ν passant par m , il n'existe pas de flèches $\alpha \in Q_1$ telle que $\alpha \notin \text{Supp}_1(\rho) \cup \text{Supp}_1(\nu)$, $s(\alpha) \in \text{Supp}_0(\rho)$ et $t(\alpha) \in \text{Supp}_0(\nu)$;
- (ii) Au moins une des conditions suivantes est satisfaite :
- (a) Il y a au plus une flèche $\alpha \in Q_1$ telle que $s(\alpha) = m$, et au plus une flèche $\beta \in Q_1$ telle que $t(\beta) = m$; si α et β existent toute deux alors $\alpha\beta \in I$;

Résultats

Résultats

Esquisse de preuve (Théorème 27).



Esquisse de preuve (Théorème 27).

- (i) et (ii)(b) $\implies \mathcal{C}_{Q,m}$ canoniquement retrouvable de Jordan



Résultats

Esquisse de preuve (Théorème 27).

- (i) et $(ii)(b) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ canoniquement retrouvable de Jordan
 - Conséquence directe du Théorème 26.



Résultats

Esquisse de preuve (Théorème 27).

- (i) et $(ii)(b) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ canoniquement retrouvable de Jordan
 - Conséquence directe du Théorème 26.
- (i) et $(ii)(a) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ canoniquement retrouvable de Jordan



Résultats

Esquisse de preuve (Théorème 27).

- (i) et $(ii)(b) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ canoniquement retrouvable de Jordan
 - Conséquence directe du Théorème 26.
- (i) et $(ii)(a) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ canoniquement retrouvable de Jordan
 - Toute corde passant par m commence par m et est caractérisé par son but ;
 - On définit un ordre (total) sur ces cordes, et cette ordre totale implique un ordre total sur les représentations indécomposables de $\mathcal{C}_{Q,m} : \rho \leq \mu \iff \text{Hom}(M(\mu), M(\rho)) \neq 0 ;$



Résultats

Esquisse de preuve (Théorème 27).

- (i) et $(ii)(b) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ canoniquement retrouvable de Jordan
 - Conséquence directe du Théorème 26.
- (i) et $(ii)(a) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ canoniquement retrouvable de Jordan
 - Toute corde passant par m commence par m et est caractérisé par son but ;
 - On définit un ordre (total) sur ces cordes, et cette ordre totale implique un ordre total sur les représentations indécomposables de $\mathcal{C}_{Q,m} : \rho \leq \mu \iff \text{Hom}(M(\mu), M(\rho)) \neq 0$;
 - Nous montrons que $\forall X \in \mathcal{C}_{Q,m}, \text{GenJF}(X) = ((\dim X_q))_{q \in Q_0}$;



Résultats

Esquisse de preuve (Théorème 27).

- (i)* et *(ii)(b)* $\implies \mathcal{C}_{Q,m}$ canoniquement retrouvable de Jordan
 - Conséquence directe du Théorème 26.
- (i)* et *(ii)(a)* $\implies \mathcal{C}_{Q,m}$ canoniquement retrouvable de Jordan
 - Toute corde passant par m commence par m et est caractérisé par son but ;
 - On définit un ordre (total) sur ces cordes, et cette ordre totale implique un ordre total sur les représentations indécomposables de $\mathcal{C}_{Q,m} : \rho \leq \mu \iff \text{Hom}(M(\mu), M(\rho)) \neq 0$;
 - Nous montrons que $\forall X \in \mathcal{C}_{Q,m}, \text{GenJF}(X) = ((\dim X_q))_{q \in Q_0}$;
 - En reprenant l'idée de l'exemple vu plus tôt, de façon plus minutieuse, on montrer que nous pouvons bien retrouver X génériquement.



Résultats

Esquisse de preuve (Théorème 27).

- (i) et $(ii)(b) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ canoniquement retrouvable de Jordan
 - Conséquence directe du Théorème 26.
- (i) et $(ii)(a) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ canoniquement retrouvable de Jordan
 - Toute corde passant par m commence par m et est caractérisé par son but ;
 - On définit un ordre (total) sur ces cordes, et cette ordre totale implique un ordre total sur les représentations indécomposables de $\mathcal{C}_{Q,m} : \rho \leq \mu \iff \text{Hom}(M(\mu), M(\rho)) \neq 0$;
 - Nous montrons que $\forall X \in \mathcal{C}_{Q,m}, \text{GenJF}(X) = ((\dim X_q))_{q \in Q_0}$;
 - En reprenant l'idée de l'exemple vu plus tôt, de façon plus minutieuse, on montrer que nous pouvons bien retrouver X génériquement.
- non $(i) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ non canoniquement retrouvable de Jordan



- (i) et (ii)(b) $\implies \mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ canoniquement retrouvable de Jordan
 - Conséquence directe du Théorème 26.
- (i) et (ii)(a) $\implies \mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ canoniquement retrouvable de Jordan
 - Toute corde passant par m commence par m et est caractérisé par son but ;
 - On définit un ordre (total) sur ces cordes, et cette ordre totale implique un ordre total sur les représentations indécomposables de $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$: $\rho \leq \mu \iff \text{Hom}(M(\mu), M(\rho)) \neq 0$;
 - Nous montrons que $\forall X \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$, $\text{GenJF}(X) = ((\dim X_q))_{q \in \mathcal{Q}_0}$;
 - En reprenant l'idée de l'exemple vu plus tôt, de façon plus minutieuse, on montrer que nous pouvons bien retrouver X génériquement.
- non (i) $\implies \mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ non canoniquement retrouvable de Jordan
 - Il n'y a pas de choix générique.
- non (ii) $\implies \mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ non canoniquement retrouvable de Jordan



Résultats

Esquisse de preuve (Théorème 27).

- (i) et $(ii)(b) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ canoniquement retrouvable de Jordan
 - Conséquence directe du Théorème 26.
- (i) et $(ii)(a) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ canoniquement retrouvable de Jordan
 - Toute corde passant par m commence par m et est caractérisé par son but ;
 - On définit un ordre (total) sur ces cordes, et cette ordre totale implique un ordre total sur les représentations indécomposables de $\mathcal{C}_{Q,m} : \rho \leq \mu \iff \text{Hom}(M(\mu), M(\rho)) \neq 0$;
 - Nous montrons que $\forall X \in \mathcal{C}_{Q,m}, \text{GenJF}(X) = ((\dim X_q))_{q \in Q_0}$;
 - En reprenant l'idée de l'exemple vu plus tôt, de façon plus minutieuse, on montrer que nous pouvons bien retrouver X génériquement.
- non $(i) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ non canoniquement retrouvable de Jordan
 - Il n'y a pas de choix générique.
- non $(ii) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ non canoniquement retrouvable de Jordan
 - Nous mettons en évidence l'existence de deux cordes ayant une certaine structure ;



Résultats

Esquisse de preuve (Théorème 27).

- (i) et $(ii)(b) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ canoniquement retrouvable de Jordan
 - Conséquence directe du Théorème 26.
- (i) et $(ii)(a) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ canoniquement retrouvable de Jordan
 - Toute corde passant par m commence par m et est caractérisé par son but ;
 - On définit un ordre (total) sur ces cordes, et cette ordre totale implique un ordre total sur les représentations indécomposables de $\mathcal{C}_{Q,m} : \rho \leq \mu \iff \text{Hom}(M(\mu), M(\rho)) \neq 0$;
 - Nous montrons que $\forall X \in \mathcal{C}_{Q,m}, \text{GenJF}(X) = ((\dim X_q))_{q \in Q_0}$;
 - En reprenant l'idée de l'exemple vu plus tôt, de façon plus minutieuse, on montrer que nous pouvons bien retrouver X génériquement.
- non $(i) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ non canoniquement retrouvable de Jordan
 - Il n'y a pas de choix générique.
- non $(ii) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ non canoniquement retrouvable de Jordan
 - Nous mettons en évidence l'existence de deux cordes ayant une certaine structure ;
 - Avec ces cordes, on construit deux représentations qui ont la même donné générique de la forme de Jordan.



Résultats

Résultats

Théorème 28 [D. '21+]

Soit $\mathcal{Q} = (Q, I)$ un carquois aimable fini connexe et $m \in Q_0$. La sous-catégorie $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}, m}$ est retrouvable de Jordan si et seulement si m vérifie le point (ii) du Théorème 27 et :

Résultats

Théorème 28 [D. '21+]

Soit $\mathcal{Q} = (Q, I)$ un carquois aimable fini connexe et $m \in Q_0$. La sous-catégorie $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}, m}$ est retrouvable de Jordan si et seulement si m vérifie le point (ii) du Théorème 27 et :

- (i*) Si nous avons deux cordes ρ et ν passant par m telles qu'il existe une flèche $\alpha \in Q_1$ telle que $\alpha \notin \text{Supp}_1(\rho) \cup \text{Supp}_1(\nu)$, $s(\alpha) \in \text{Supp}_0(\rho)$ et $t(\alpha) \in \text{Supp}_0(\nu)$, alors il n'y a pas de cordes ρ' passant par m telle que $\alpha \in \text{Supp}_1(\rho')$.

Résultats

Résultats

Esquisse de preuve (Théorème 28).

Esquisse de preuve (Théorème 28).

- $(i*)$ et $(ii) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ retrouvable de Jordan

Résultats

Esquisse de preuve (Théorème 28).

- $(i*)$ et $(ii) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ retrouvable de Jordan
 - Se déduit assez directement du raisonnement fait pour la preuve précédente.

- $(i*)$ et $(ii) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ retrouvable de Jordan
 - Se déduit assez directement du raisonnement fait pour la preuve précédente.
- non $(i*) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ non retrouvable de Jordan

Résultats

Esquisse de preuve (Théorème 28).

- $(i*)$ et $(ii) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ retrouvable de Jordan
 - Se déduit assez directement du raisonnement fait pour la preuve précédente.
- non $(i*) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ non retrouvable de Jordan
 - Nous montrons d'abord que si m non minuscule alors $\mathcal{C}_{Q,m}$ n'est pas retrouvable de Jordan :

Résultats

Esquisse de preuve (Théorème 28).

- $(i*)$ et $(ii) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ retrouvable de Jordan
 - Se déduit assez directement du raisonnement fait pour la preuve précédente.
- non $(i*) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ non retrouvable de Jordan
 - Nous montrons d'abord que si m non minuscule alors $\mathcal{C}_{Q,m}$ n'est pas retrouvable de Jordan : nous mettons en avant l'existence d'une certaine corde, puis nous concluons en donnant deux représentations qui ont la même forme de Jordan ;

Résultats

Esquisse de preuve (Théorème 28).

- $(i*)$ et $(ii) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ retrouvable de Jordan
 - Se déduit assez directement du raisonnement fait pour la preuve précédente.
- non $(i*) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ non retrouvable de Jordan
 - Nous montrons d'abord que si m non minuscule alors $\mathcal{C}_{Q,m}$ n'est pas retrouvable de Jordan : nous mettons en avant l'existence d'une certaine corde, puis nous concluons en donnant deux représentations qui ont la même forme de Jordan ;
 - Nous montrons ensuite que si m vérifie la condition suivante :

Résultats

Esquisse de preuve (Théorème 28).

- $(i*)$ et $(ii) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ retrouvable de Jordan
 - Se déduit assez directement du raisonnement fait pour la preuve précédente.
- non $(i*) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ non retrouvable de Jordan
 - Nous montrons d'abord que si m non minuscule alors $\mathcal{C}_{Q,m}$ n'est pas retrouvable de Jordan : nous mettons en avant l'existence d'une certaine corde, puis nous concluons en donnant deux représentations qui ont la même forme de Jordan ;
 - Nous montrons ensuite que si m vérifie la condition suivante :

(o) : Toute corde passant par m passe au plus une fois à travers chaque sommet de Q

alors $\mathcal{C}_{Q,m}$ n'est pas retrouvable de Jordan :

Résultats

Esquisse de preuve (Théorème 28).

- $(i*)$ et $(ii) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ retrouvable de Jordan
 - Se déduit assez directement du raisonnement fait pour la preuve précédente.
- non $(i*) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ non retrouvable de Jordan
 - Nous montrons d'abord que si m non minuscule alors $\mathcal{C}_{Q,m}$ n'est pas retrouvable de Jordan : nous mettons en avant l'existence d'une certaine corde, puis nous concluons en donnant deux représentations qui ont la même forme de Jordan ;
 - Nous montrons ensuite que si m vérifie la condition suivante :

(o) : Toute corde passant par m passe au plus une fois à travers chaque sommet de Q

 alors $\mathcal{C}_{Q,m}$ n'est pas retrouvable de Jordan : même technique, mais en se réduisant au cas où m est minuscule ;



Résultats

Esquisse de preuve (Théorème 28).

- $(i*)$ et $(ii) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ retrouvable de Jordan
 - Se déduit assez directement du raisonnement fait pour la preuve précédente.
- non $(i*) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ non retrouvable de Jordan
 - Nous montrons d'abord que si m non minuscule alors $\mathcal{C}_{Q,m}$ n'est pas retrouvable de Jordan : nous mettons en avant l'existence d'une certaine corde, puis nous concluons en donnant deux représentations qui ont la même forme de Jordan ;
 - Nous montrons ensuite que si m vérifie la condition suivante :

(o) : Toute corde passant par m passe au plus une fois à travers chaque sommet de Q

 alors $\mathcal{C}_{Q,m}$ n'est pas retrouvable de Jordan : même technique, mais en se réduisant au cas où m est minuscule ;
 - Enfin, nous montrons le résultat, avec la même technique, en se réduisant au cas où m vérifie (o).



Résultats

Esquisse de preuve (Théorème 28).

- $(i*)$ et $(ii) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ retrouvable de Jordan
 - Se déduit assez directement du raisonnement fait pour la preuve précédente.
- non $(i*) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ non retrouvable de Jordan
 - Nous montrons d'abord que si m non minuscule alors $\mathcal{C}_{Q,m}$ n'est pas retrouvable de Jordan : nous mettons en avant l'existence d'une certaine corde, puis nous concluons en donnant deux représentations qui ont la même forme de Jordan ;
 - Nous montrons ensuite que si m vérifie la condition suivante :

(o) : Toute corde passant par m passe au plus une fois à travers chaque sommet de Q

 alors $\mathcal{C}_{Q,m}$ n'est pas retrouvable de Jordan : même technique, mais en se réduisant au cas où m est minuscule ;
 - Enfin, nous montrons le résultat, avec la même technique, en se réduisant au cas où m vérifie (o).
- non $(ii) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ non retrouvable de Jordan



Résultats

Esquisse de preuve (Théorème 28).

- $(i*)$ et $(ii) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ retrouvable de Jordan
 - Se déduit assez directement du raisonnement fait pour la preuve précédente.
- non $(i*) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ non retrouvable de Jordan
 - Nous montrons d'abord que si m non minuscule alors $\mathcal{C}_{Q,m}$ n'est pas retrouvable de Jordan : nous mettons en avant l'existence d'une certaine corde, puis nous concluons en donnant deux représentations qui ont la même forme de Jordan ;
 - Nous montrons ensuite que si m vérifie la condition suivante :

(o) : Toute corde passant par m passe au plus une fois à travers chaque sommet de Q

 alors $\mathcal{C}_{Q,m}$ n'est pas retrouvable de Jordan : même technique, mais en se réduisant au cas où m est minuscule ;
 - Enfin, nous montrons le résultat, avec la même technique, en se réduisant au cas où m vérifie (o).
- non $(ii) \implies \mathcal{C}_{Q,m}$ non retrouvable de Jordan
 - Se déduit du raisonnement fait pour la preuve précédente.



Plan

① Connaissances de bases

Algèbres aimables

Représentations / Modules sur une algèbre aimable

② Combinatoire des cordes et des bandes

Représentations de corde

Représentations de bande

Représentations indécomposables

Structure des morphismes entre les représentations

③ La retrouvabilité (canonique) de Jordan

La retrouvabilité de Jordan d'une catégorie

La retrouvabilité canonique de Jordan d'une catégorie

Une classe de sous-catégories intéressante

④ Résultats principaux / Aller plus loin

Résultats principaux

Aller plus loin

[Aller plus loin](#) $\mathcal{C}_{Q,m}$ pour d'autres algèbres

$\mathcal{C}_{Q,m}$ pour d'autres algèbres

Question 1

Comme nous utilisons de manière fondamentale la combinatoire des cordes, pouvons-nous étendre ces résultats dans le cadre d'autres algèbres ?

$\mathcal{C}_{Q,m}$ pour d'autres algèbres

Question 1

Comme nous utilisons de manière fondamentale la combinatoire des cordes, pouvons-nous étendre ces résultats dans le cadre d'autres algèbres ?

Nous pouvons penser aux **algèbres de cordes**, ou aux **algèbres quasi-aimables**.

$\mathcal{C}_{Q,m}$ pour d'autres algèbres

Question 1

Comme nous utilisons de manière fondamentale la combinatoire des cordes, pouvons-nous étendre ces résultats dans le cadre d'autres algèbres ?

Nous pouvons penser aux **algèbres de cordes**, ou aux **algèbres quasi-aimables**.
Toutefois, travailler avec ces algèbres ne semble pas aussi agréable que dans le cas aimable.

$\mathcal{C}_{Q,m}$ pour d'autres algèbres

Question 1

Comme nous utilisons de manière fondamentale la combinatoire des cordes, pouvons-nous étendre ces résultats dans le cadre d'autres algèbres ?

Nous pouvons penser aux **algèbres de cordes**, ou aux **algèbres quasi-aimables**.
Toutefois, travailler avec ces algèbres ne semble pas aussi agréable que dans le cas aimable.

Nous pouvons néanmoins nous attendre à des résultats similaires, notamment pour la retrouvabilité canonique de Jordan.

[Aller plus loin](#)

Décrire toutes les catégories canoniquement retrouvable de Jordan

Décrire toutes les catégories canoniquement retrouvable de Jordan

Question 2

Étant donnée un carquois aimable $\mathcal{Q}$, quelles sont les sous-catégories de $\text{rep}(\mathcal{Q})$ canoniquement retrouvables de Jordan ?

Décrire toutes les catégories canoniquement retrouvable de Jordan

Question 2

Étant donnée un carquois aimable $\mathcal{Q}$, quelles sont les sous-catégories de $\text{rep}(\mathcal{Q})$ canoniquement retrouvables de Jordan ?

Une idée est de s'y prendre comme nous venons de le faire : répondre à la question dans le cas où $\mathcal{Q}$ est du type A_n (et $I = 0$), puis étendre au cas aimable.

Décrire toutes les catégories canoniquement retrouvables de Jordan

Question 2

Étant donnée un carquois aimable $\mathcal{Q}$, quelles sont les sous-catégories de $\text{rep}(\mathcal{Q})$ canoniquement retrouvables de Jordan ?

Une idée est de s'y prendre comme nous venons de le faire : répondre à la question dans le cas où $\mathcal{Q}$ est du type A_n (et $I = 0$), puis étendre au cas aimable.
 Pour le type A_n , j'ai une conjecture.

Décrire toutes les catégories canoniquement retrouvable de Jordan

Question 2

Étant donnée un carquois aimable Q , quelles sont les sous-catégories de $\text{rep}(Q)$ canoniquement retrouvables de Jordan ?

Une idée est de s'y prendre comme nous venons de le faire : répondre à la question dans le cas où Q est du type A_n (et $I = 0$), puis étendre au cas aimable.
 Pour le type A_n , j'ai une conjecture.

Conjecture 29 [D. '21+]

Soit Q un carquois de type A_n . Une sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $\text{rep}(Q)$ est canoniquement retrouvable de Jordan si et seulement si pour tout couple de cordes (ρ, ν) associées à des représentations indécomposables de $\mathcal{C}$, il n'existe pas de flèche α telle que :

Décrire toutes les catégories canoniquement retrouvables de Jordan

Question 2

Étant donnée un carquois aimable $\mathcal{Q}$, quelles sont les sous-catégories de $\text{rep}(\mathcal{Q})$ canoniquement retrouvables de Jordan ?

Une idée est de s'y prendre comme nous venons de le faire : répondre à la question dans le cas où $\mathcal{Q}$ est du type A_n (et $I = 0$), puis étendre au cas aimable.

Pour le type A_n , j'ai une conjecture.

Conjecture 29 [D. '21+]

Soit $\mathcal{Q}$ un carquois de type A_n . Une sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $\text{rep}(\mathcal{Q})$ est canoniquement retrouvable de Jordan si et seulement si pour tout couple de cordes (ρ, ν) associées à des représentations indécomposables de $\mathcal{C}$, il n'existe pas de flèche α telle que :

$$s(\alpha) \in \text{Supp}_0(\rho), t(\alpha) \in \text{Supp}_0(\nu) \text{ et } \alpha \notin \text{Supp}_1(\rho) \cup \text{Supp}_1(\nu)$$

Décrire toutes les catégories canoniquement retrouvables de Jordan

Question 2

Étant donnée un carquois aimable $\mathcal{Q}$, quelles sont les sous-catégories de $\text{rep}(\mathcal{Q})$ canoniquement retrouvables de Jordan ?

Une idée est de s'y prendre comme nous venons de le faire : répondre à la question dans le cas où $\mathcal{Q}$ est du type A_n (et $I = 0$), puis étendre au cas aimable.

Pour le type A_n , j'ai une conjecture.

Conjecture 29 [D. '21+]

Soit $\mathcal{Q}$ un carquois de type A_n . Une sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $\text{rep}(\mathcal{Q})$ est canoniquement retrouvable de Jordan si et seulement si pour tout couple de cordes (ρ, ν) associées à des représentations indécomposables de $\mathcal{C}$, il n'existe pas de flèche α telle que :

$$s(\alpha) \in \text{Supp}_0(\rho), t(\alpha) \in \text{Supp}_0(\nu) \text{ et } \alpha \notin \text{Supp}_1(\rho) \cup \text{Supp}_1(\nu)$$

Nous remarquerons une familiarité avec l'hypothèse (i). De plus, il est facile de noter que nous avons le sens direct via la preuve du Théorème 27.

[Aller plus loin](#)

Caractérisation "théorie des représentations"

Caractérisation "théorie des représentations"

Question 3

Pouvons-nous traduire ces caractérisations combinatoires en caractérisation en termes d'outils de la théorie des représentations ?

Caractérisation "théorie des représentations"

Question 3

Pouvons-nous traduire ces caractérisations combinatoires en caractérisation en termes d'outils de la théorie des représentations ?

C'est une idée que j'ai en tête que je n'ai pas encore eu le temps d'explorer.

Caractérisation "théorie des représentations"

Question 3

Pouvons-nous traduire ces caractérisations combinatoires en caractérisation en termes d'outils de la théorie des représentations ?

C'est une idée que j'ai en tête que je n'ai pas encore eu le temps d'explorer.
Cela pourrait nous permettre de répondre plus facilement aux questions précédentes.

[Aller plus loin](#)

Du RSK dans les algèbres aimables

Du RSK dans les algèbres aimables

Question 4

Pouvons-nous construire une fonction qui généralise la correspondance de Robinson-Schensted-Knuth au cas des algèbres aimables ?

Du RSK dans les algèbres aimables

Question 4

Pouvons-nous construire une fonction qui généralise la correspondance de Robinson-Schensted-Knuth au cas des algèbres aimables ?

Cette idée provient des travaux de Garver, Patrias et Thomas dans le cas A_n avec les catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$.

71 / 72

Du RSK dans les algèbres aimables

Question 4

Pouvons-nous construire une fonction qui généralise la correspondance de Robinson-Schensted-Knuth au cas des algèbres aimables ?

Cette idée provient des travaux de Garver, Patrias et Thomas dans le cas A_n avec les catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$.

Ils ont construit une fonction $\rho_{Q,m}$ qui à un remplissage du carquois d'Auslander-Reiten réduit aux indécomposables de $\mathcal{C}$ (les multiplicités des indécomposables dans une représentation $X \in \mathcal{C}$) associe un remplissage "décroissant" de ce même carquois réduit aux indécomposables de $\mathcal{C}$ (correspondant à $\text{GenJF}(X)$).

Cette fonction peut être vue comme une extension du RSK au sens où cette application a les mêmes invariants de Greene-Kleitman.

Du RSK dans les algèbres aimables

Question 4

Pouvons-nous construire une fonction qui généralise la correspondance de Robinson-Schensted-Knuth au cas des algèbres aimables ?

Cette idée provient des travaux de Garver, Patrias et Thomas dans le cas A_n avec les catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$.

Ils ont construit une fonction $\rho_{Q,m}$ qui à un remplissage du carquois d'Auslander-Reiten réduit aux indécomposables de $\mathcal{C}$ (les multiplicités des indécomposables dans une représentation $X \in \mathcal{C}$) associe un remplissage "décroissant" de ce même carquois réduit aux indécomposables de $\mathcal{C}$ (correspondant à $\text{GenJF}(X)$).

Cette fonction peut être vue comme une extension du RSK au sens où cette application a les mêmes invariants de Greene-Kleitman.

Nous pouvons nous demander s'il est possible de construire ce genre d'application pour n'importe quelle catégorie (canoniquement) retrouvable de Jordan dans le cas aimable.

Pour récapituler les idées :

Pour récapituler les idées :

- 1) Après avoir donné ou rappelé les outils travaillés, nous avons vu une caractérisation combinatoire des catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$ qui sont retrouvables de Jordan et une caractérisation combinatoire des catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$ qui sont canoniquement retrouvables de Jordan. Ces caractérisations utilisent essentiellement la combinatoire des cordes.

Pour récapituler les idées :

- 1) Après avoir donné ou rappelé les outils travaillés, nous avons vu une caractérisation combinatoire des catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$ qui sont retrouvables de Jordan et une caractérisation combinatoire des catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$ qui sont canoniquement retrouvables de Jordan. Ces caractérisations utilisent essentiellement la combinatoire des cordes.
- 2) Une question de généralisation dans d'autres types d'algèbres se pose.

Pour récapituler les idées :

- 1) Après avoir donné ou rappelé les outils travaillés, nous avons vu une caractérisation combinatoire des catégories $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ qui sont retrouvables de Jordan et une caractérisation combinatoire des catégories $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ qui sont canoniquement retrouvables de Jordan. Ces caractérisations utilisent essentiellement la combinatoire des cordes.
- 2) Une question de généralisation dans d'autres types d'algèbres se pose.
- 3) Une question de caractérisation de toutes les sous-catégories de $\text{rep}(\mathcal{Q})$ qui sont retrouvables de Jordan ou canoniquement retrouvables de Jordan est également sur la table.

Pour récapituler les idées :

- 1) Après avoir donné ou rappelé les outils travaillés, nous avons vu une caractérisation combinatoire des catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$ qui sont retrouvables de Jordan et une caractérisation combinatoire des catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$ qui sont canoniquement retrouvables de Jordan. Ces caractérisations utilisent essentiellement la combinatoire des cordes.
- 2) Une question de généralisation dans d'autres types d'algèbres se pose.
- 3) Une question de caractérisation de toutes les sous-catégories de $\text{rep}(Q)$ qui sont retrouvables de Jordan ou canoniquement retrouvables de Jordan est également sur la table.
- 4) Ces notions étant en lien avec la correspondance RSK, nous pourrions ainsi développer une généralisation de cette correspondance qui s'appliquerait dans le cadre de la théorie des représentations.

Pour récapituler les idées :

- 1) Après avoir donné ou rappelé les outils travaillés, nous avons vu une caractérisation combinatoire des catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$ qui sont retrouvables de Jordan et une caractérisation combinatoire des catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$ qui sont canoniquement retrouvables de Jordan. Ces caractérisations utilisent essentiellement la combinatoire des cordes.
- 2) Une question de généralisation dans d'autres types d'algèbres se pose.
- 3) Une question de caractérisation de toutes les sous-catégories de $\text{rep}(Q)$ qui sont retrouvables de Jordan ou canoniquement retrouvables de Jordan est également sur la table.
- 4) Ces notions étant en lien avec la correspondance RSK, nous pourrions ainsi développer une généralisation de cette correspondance qui s'appliquerait dans le cadre de la théorie des représentations.
- 5) Peut-être d'autres idées intéressantes à exploiter ?...

Pour récapituler les idées :

- 1) Après avoir donné ou rappelé les outils travaillés, nous avons vu une caractérisation combinatoire des catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$ qui sont retrouvables de Jordan et une caractérisation combinatoire des catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$ qui sont canoniquement retrouvables de Jordan. Ces caractérisations utilisent essentiellement la combinatoire des cordes.
- 2) Une question de généralisation dans d'autres types d'algèbres se pose.
- 3) Une question de caractérisation de toutes les sous-catégories de $\text{rep}(Q)$ qui sont retrouvables de Jordan ou canoniquement retrouvables de Jordan est également sur la table.
- 4) Ces notions étant en lien avec la correspondance RSK, nous pourrions ainsi développer une généralisation de cette correspondance qui s'appliquerait dans le cadre de la théorie des représentations.
- 5) Peut-être d'autres idées intéressantes à exploiter ?...

Affaire à suivre...

Pour récapituler les idées :

- 1) Après avoir donné ou rappelé les outils travaillés, nous avons vu une caractérisation combinatoire des catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$ qui sont retrouvables de Jordan et une caractérisation combinatoire des catégories $\mathcal{C}_{Q,m}$ qui sont canoniquement retrouvables de Jordan. Ces caractérisations utilisent essentiellement la combinatoire des cordes.
- 2) Une question de généralisation dans d'autres types d'algèbres se pose.
- 3) Une question de caractérisation de toutes les sous-catégories de $\text{rep}(Q)$ qui sont retrouvables de Jordan ou canoniquement retrouvables de Jordan est également sur la table.
- 4) Ces notions étant en lien avec la correspondance RSK, nous pourrions ainsi développer une généralisation de cette correspondance qui s'appliquerait dans le cadre de la théorie des représentations.
- 5) Peut-être d'autres idées intéressantes à exploiter ?...

Affaire à suivre...

Merci pour votre attention !