Compactifications magnifiques d'immeubles de Bruhat-Tits

Dorian Chanfi

Justus-Liebig-Universität Gießen

18 Mars 2022

Plan de l'exposé

Motivation

Étant donnés un corps local non archimédien k et un groupe réductif G (penser GL_n, O_n, Sp_{2n}) sur k, comment étudier $G(k)$ et ses sous-groupes ?

Idée

Le faire agir sur un espace admettant une bonne géométrie. Par analogie avec le cas archimédien, on voudrait un espace courbé négativement muni d'une action transitive du groupe.

Remarque

Si $k = \mathbb{R}$, le groupe $G(\mathbb{R})$ est un groupe de Lie. Si K est un sous-groupe compact maximal, alors $G(\mathbb{R})/K$ est un espace symétrique de courbure négative sur lequel $G(\mathbb{R})$ agit transitivement.
Pour $G = SL_2$, on peut prendre $K = SO(2, \mathbb{R})$ et on retrouve le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = SL(2, \mathbb{R})/SO(2, \mathbb{R})$.

Voici une définition provisoire:

"Définition"

Un immeuble affine est un complexe polysimplicial, réunion de sous-complexes tous isomorphes à un même "pavage euclidien" et soumis à des relations d'incidence.

Reste à préciser ce que l'on entend par un pavage euclidien et à préciser les relations d'incidence auxquelles sont soumis les immeubles.

Définition (Bourbaki, Lie V.3)

On appelle pavage euclidien la donnée d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ et d'un arrangement d'hyperplans $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{E}$ tel que:

- Pour tout hyperplan $H \in \mathcal{H}$, l'ensemble $\mathcal{H}$ est laissé invariant par la réflexion orthogonale r_H par rapport à H.
- Si W est le groupe

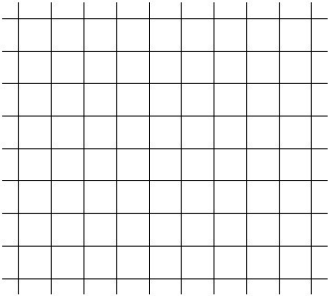
$$W = \langle r_H, H \in \mathcal{H} \rangle,$$

  alors pour tous compacts K, L, l'ensemble des $w \in W$ tels que $w(K)$ rencontre L est fini.

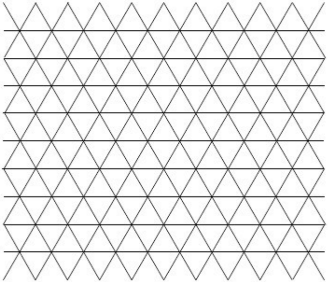
Pavages euclidiens

Quelques exemples de pavages euclidiens:

$\widetilde{A}_1$



$\widetilde{A}_1 \times \widetilde{A}_1$



$\widetilde{A}_2$

Un peu de terminologie:

Définition

Soit $\mathcal{H}$ un arrangement d'hyperplans dans $\mathcal{E}$.

- On appellera les éléments de $\mathcal{H}$ des "murs".
- Une facette du pavage est une classe d'équivalence pour la relation "avoir la même position relative par rapport à tous les murs".
- Une *alcôve* du pavage est une facette ouverte.
- Un *sommet* est une facette de dimension 0.

Axiomes d'incidence

Soit X un complexe polysimplicial muni d'une famille $\mathcal{A}$ de sous-complexes. Alors, X est un immeuble affine si:

1. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, le complexe A est un pavage euclidien.

Axiomes d'incidence

Soit X un complexe polysimplicial muni d'une famille $\mathcal{A}$ de sous-complexes. Alors, X est un immeuble affine si:

1. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, le complexe A est un pavage euclidien.
2. Toute paire de facettes est incluse dans un appartement.

Axiomes d'incidence

Soit X un complexe polysimplicial muni d'une famille $\mathcal{A}$ de sous-complexes. Alors, X est un immeuble affine si:

1. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, le complexe A est un pavage euclidien.
2. Toute paire de facettes est incluse dans un appartement.
3. Pour toute paire d'appartements A et A', il existe un isomorphisme simplicial $A \to A'$ fixant l'intersection $A \cap A'$.

Remarque: L'isomorphisme $A \to A'$ ne s'étend pas nécessairement à X tout entier !

Soit X un complexe polysimplicial muni d'une famille $\mathcal{A}$ de sous-complexes. Alors, X est un immeuble affine si:

1. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, le complexe A est un pavage euclidien.
2. Toute paire de facettes est incluse dans un appartement.
3. Pour toute paire d'appartements A et A', il existe un isomorphisme simplicial $A \to A'$ fixant l'intersection $A \cap A'$.

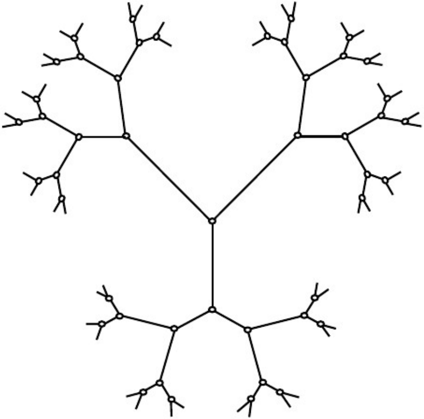
Remarque: L'isomorphisme $A \to A'$ ne s'étend pas nécessairement à X tout entier !

Remarque

Sous ces hypothèses, X admet une distance qui en fait un espace métrique complet $CAT(0)$. (les triangles géodésiques sont au moins aussi fins que les euclidiens)

Exemples d'immeubles

1. Un pavage euclidien est un immeuble affine (dit "fin").
2. Tout arbre sans sommet terminal est un immeuble.
3. L'arbre de Bruhat-Tits de $SL_2(\mathbb{Q}_2)$.



Dans leurs deux articles de 1972 et 1984, Bruhat et Tits démontrent le résultat suivant:

Théorème (Iwahori, Matsumoto, Bruhat, Tits)

Soit G un groupe réductif sur un corps local k. Il existe un immeuble affine $\mathcal{B}(G,k)$ muni d'une action de $G(k)$

1. propre
2. fortement transitive, ie. transitive sur les inclusions $(F \subset A)$ d'une alcôve dans un appartement.

De plus, pour toute facette $F \subset \mathcal{B}(G,k)$, on dispose d'une $k/\mathcal{O}_k$ forme $\mathcal{G}_F$ de G telle que $\mathcal{G}_F(\mathcal{O}_k) = \mathrm{Stab}_{G(k)}(F)$.

Remarque

Il existe un système compatible d'inclusions $\mathcal{B}(G,K) \hookrightarrow \mathcal{B}(G,L)$ pour toute tour d'extensions finies galoisiennes $L/K/k$.

Si G est semi-simple et simplement connexe, on a le dictionnaire:

Immeuble $\mathcal{B}(G,k)$	Groupe G
Alcôves	Sous-groupes d'Iwahori de $G(k)$
Facettes	Sous-groupes parahoriques de $G(k)$
Sommets	Sous-groupes compacts maximaux de $G(k)$
Appartements	Tores k-déployés maximaux de G

Remarque

La décomposition de Bruhat découle directement des axiomes: Si $N \leq G(k)$ est le stabilisateur d'un appartement et B_c celui d'une alcôve c de cet appartement, alors $G(k) = B_c N B_c$.

Idée: Dans le cas où k est un corps muni d'une valuation non archimédienne, on définit des espaces admettant une bonne théorie des fonctions analytiques en ajoutant des points permettant de "combler" les manques de la topologie de k.
De manière analogue à la construction du spectre d'un anneau commutatif en géométrie algébrique, on définit le spectre d'une algèbre de Banach $(A, ||\cdot||)$ sur k par

$$\mathcal{M}(A) = \left\{ \begin{array}{c} \text{Seminormes multiplicatives } A \to \mathbb{R}_+ \\ \text{bornées par rapport à } ||\cdot|| \end{array} \right\}.$$

C'est un espace topologique compact (non vide!)

Analytification

On admet qu'il existe une catégorie des espaces analytiques sur k et un foncteur

$$V \mapsto V^{\mathrm{an}}$$

des variétés sur k vers les espaces analytiques sur k tels que:

Proposition

1. Si V est une variété affine, alors on a, en tant qu'espace topologique

$$V^{\mathrm{an}} = \{\text{Seminormes multiplicatives sur k[V] étendant } |\cdot|_k\}.$$

2. Si V est une variété projective, alors V^{an} est compact.

Motivation: L'immeuble associé à $G(k)$ classifie des sous-groupes remarquables de l'immeuble. Par exemple, on a une correspondance:

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Sommets de } \mathcal{B}(G,k)\} & \longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c}\text{Sous-groupes compacts} \\ \text{maximaux de } G(k)\end{array}\right\} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Stab}_{G(k)}(x). \end{array}$$

On s'attend à ce qu'une compactification permette d'incorporer des sous-groupes plus généraux.

Compactifications d'immeubles

Pour produire des compactifications d'immeubles au moyen de ce qui précède, on va construire des plongements $G(k)$-équivariants:

$$\mathcal{B}(G,k) \to Z^{\mathrm{an}}$$

où Z est une variété projective munie d'une action de G.

Toutes les constructions reposent sur l'existence d'un plongement $G(k)$-équivariant

$$\vartheta : \mathcal{B}(G,k) \to \underbrace{G^{\mathrm{an}}}_{\text{pas compact...}}$$

que l'on composera avec des applications $(G \to Z)^{\mathrm{an}}$, où Z est une variété projective.

Toutes les constructions reposent sur l'existence d'un plongement $G(k)$-équivariant

$$\vartheta : \mathcal{B}(G,k) \to \underbrace{G^{\mathrm{an}}}_{\text{pas compact...}}$$

que l'on composera avec des applications $(G \to Z)^{\mathrm{an}}$, où Z est une variété projective.
L'idée, due à Berkovich, consiste à associer à tout point de l'immeuble un sous-groupe analytique $G_x \leq G^{\mathrm{an}}$. Le résultat est une théorie plus fine au sens suivant: La famille des sous-groupes (G_x) est injective sur les points alors que la famille des parahoriques $(\mathcal{G}_x^\circ)$ obtenus par théorie de BT est constante sur les facettes.

Cas où Z est une variété de drapeaux $Z = G/P$, avec P un sous-groupe parabolique.

Cas où Z est une variété de drapeaux $Z = G/P$, avec P un sous-groupe parabolique.
On obtient un morphisme

$$\iota_P : \mathcal{B}(G,k) \xrightarrow{\vartheta} G^{\mathrm{an}} \to (G/P)^{\mathrm{an}}$$

et on pose $\overline{\mathcal{B}}^P = \overline{\iota_P(X)}$.

Cas où Z est une variété de drapeaux $Z = G/P$, avec P un sous-groupe parabolique.
On obtient un morphisme

$$\iota_P : \mathcal{B}(G,k) \xrightarrow{\vartheta} G^{\mathrm{an}} \to (G/P)^{\mathrm{an}}$$

et on pose $\overline{\mathcal{B}}^P = \overline{\iota_P(X)}$.

Fait (Berkovich, 1990 puis Rémy, Thuillier, Werner, 2010)

L'application composée ι_P est injective et $\overline{\mathcal{B}}^P$ est donc une compactification $G(k)$-équivariante de $\mathcal{B}$.

Compactifications de Satake-Berkovich

Idée: Pour

- T un tore k-déployé maximal
- x un point de l'appartement $A(T, k) \simeq X_*(T) \otimes \mathbb{R}$
- B est un sous-groupe de Borel contenant T

Idée: Pour

- T un tore k-déployé maximal
- x un point de l'appartement $A(T,k) \simeq X_*(T) \otimes \mathbb{R}$
- B est un sous-groupe de Borel contenant T

on a

$$\vartheta(x) \in \Omega(T,B)^{\mathrm{an}}$$

Idée: Pour

- T un tore k-déployé maximal
- x un point de l'appartement $A(T,k) \simeq X_*(T) \otimes \mathbb{R}$
- B est un sous-groupe de Borel contenant T

on a

$$\vartheta(x) \in \Omega(T,B)^{\mathrm{an}}$$

et pour $f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^\Phi, \chi \in X^*(T)} a_{\chi,\nu} \chi \xi^\nu \in k[X^*(T)][(\xi_\alpha)_{\alpha \in \Phi}]$:

$$|f(\vartheta(x))| = \max_{\substack{\nu \in \mathbb{N}^\Phi \\ \chi \in X^*(T)}} |a_{\chi,\nu}| \prod_{\alpha \in \Phi} e^{\nu_\alpha \langle \alpha, x \rangle}$$

Idée: Pour

- T un tore k-déployé maximal
- x un point de l'appartement $A(T,k) \simeq X_*(T) \otimes \mathbb{R}$
- B est un sous-groupe de Borel contenant T

on a

$$\vartheta(x) \in \Omega(T,B)^{\mathrm{an}}$$

et pour $f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^\Phi, \chi \in X^*(T)} a_{\chi,\nu} \chi \xi^\nu \in k[X^*(T)][(\xi_\alpha)_{\alpha \in \Phi}]$:

$$|f(\vartheta(x))| = \max_{\substack{\nu \in \mathbb{N}^\Phi \\ \chi \in X^*(T)}} |a_{\chi,\nu}| \prod_{\alpha \in \Phi} e^{\nu_\alpha \langle \alpha, x \rangle}$$

Morale: On peut retrouver x à partir des pondérations de la norme $\vartheta(x)$.

Structure formellement analogue aux compactifications de Satake d'espaces symétriques riemanniens:

- On obtient une compactification par classe de conjugaison de sous-groupes paraboliques de G.

Compactifications de Satake-Berkovich

Structure formellement analogue aux compactifications de Satake d'espaces symétriques riemanniens:

- On obtient une compactification par classe de conjugaison de sous-groupes paraboliques de G.
- Le bord de la compactification $\mathcal{B}(G,k)$ est constitué d'une réunion d'immeubles de Bruhat-Tits. Si P est un sous-groupe parabolique minimal, on a exactement:

$$\overline{\mathcal{B}(G,k)}^P = \mathcal{B}(G,k) \sqcup \bigsqcup_{\substack{Q \neq G \\ Q \text{ parabolique}}} \mathcal{B}(Q/R(Q),k).$$

Compactification magnifique

Autre idée: Si G est semi-simple, adjoint et déployé, prendre $Z = \overline{G}$ la *compactification magnifique* de G définie par de Concini et Procesi.

Faits algébriques (De Concini, Procesi, Strickland, Springer)

- $G \hookrightarrow \overline{G}$ est $(G \times G)$-équivariant.
- $\overline{G}$ est une variété projective lisse.
- $\overline{G} \setminus G$ est un diviseur à croisements normaux dont les composantes sont en bijection avec les racines simples de G.
- Les $(G \times G)$-orbites de $\overline{G}$ sont en nombre fini, lisses, en bijection avec les ensembles de racines simples de G et il existe une unique orbite fermée.

Exemple: Si $G = PGL_{2,k}$, alors $\overline{G} = \mathbb{P}(M_{2,k})$ et $\overline{G} \setminus G = \{\det = 0\} \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Comparaison des compactifications

On suppose: G déployé, semi-simple adjoint.
On pose $\mathcal{B} = \mathcal{B}(G, k)$ et on note $\overline{\mathcal{B}}$ la compactification de Satake-Berkovich associé à un sous-groupe de Borel.

Théorème (Rémy, Thuillier, Werner, 2017)

1. Il existe une application $(G(k) \times G(k))$-équivariante

$$\Theta : \mathcal{B} \times \overline{\mathcal{B}} \to \overline{G}^{\mathrm{an}}$$

telle que, pour tout $x \in \mathcal{B}$, l'application $\Theta(x, \cdot) : \overline{\mathcal{B}} \to \overline{G}^{\mathrm{an}}$ soit un homéomorphisme $G(k)$-équivariant sur son image (la "compactification magnifique" de $\mathcal{B}$).

Comparaison des compactifications

On suppose: G déployé, semi-simple adjoint.
On pose $\mathcal{B} = \mathcal{B}(G, k)$ et on note $\overline{\mathcal{B}}$ la compactification de Satake-Berkovich associé à un sous-groupe de Borel.

Théorème (Rémy, Thuillier, Werner, 2017)

1. Il existe une application $(G(k) \times G(k))$-équivariante
$$\Theta : \mathcal{B} \times \overline{\mathcal{B}} \to \overline{G}^{\mathrm{an}}$$
telle que, pour tout $x \in \mathcal{B}$, l'application $\Theta(x, \cdot) : \overline{\mathcal{B}} \to \overline{G}^{\mathrm{an}}$ soit un homéomorphisme $G(k)$-équivariant sur son image (la "compactification magnifique" de $\mathcal{B}$).
2. Les bords sont "compatibles" au sens où, si P est un sous-groupe parabolique propre de G de type τ, alors la strate $\mathcal{B}(P/R(P), k) \subset \partial\mathcal{B}$ est envoyée par $\Theta(x, \cdot)$ dans l'adhérence d'orbite $\left(\bigcap_{\alpha \notin \tau} D_\alpha\right)^{\mathrm{an}}$.

Compactifications magnifiques non déployées

Soit G un groupe semi-simple adjoint sur k. Il existe une extension finie galoisienne k'/k telle que $G_{k'}$ soit déployé. Soit
$\Gamma = \mathrm{Gal}(k'/k)$.
Alors:

Proposition (C., 2020)

- Γ agit naturellement sur la compactification magnifique $\overline{G_{k'}}$.

Compactifications magnifiques non déployées

Soit G un groupe semi-simple adjoint sur k. Il existe une extension finie galoisienne k'/k telle que $G_{k'}$ soit déployé. Soit $\Gamma = \mathrm{Gal}(k'/k)$.

Alors:

Proposition (C., 2020)

- Γ agit naturellement sur la compactification magnifique $\overline{G_{k'}}$.
- L'action induite sur les composantes irréductibles de bord s'identifie à l'action-$*$ de Γ sur les classes de conjugaison de paraboliques propres maximaux.

Compactifications magnifiques non déployées

Soit G un groupe semi-simple adjoint sur k. Il existe une extension finie galoisienne k'/k telle que $G_{k'}$ soit déployé. Soit $\Gamma = \mathrm{Gal}(k'/k)$.
Alors:

Proposition (C., 2020)

- Γ agit naturellement sur la compactification magnifique $\overline{G_{k'}}$.
- L'action induite sur les composantes irréductibles de bord s'identifie à l'action-$*$ de Γ sur les classes de conjugaison de paraboliques propres maximaux.
- Une strate de bord $\bigcap_{\alpha \notin \tau} D_\alpha$ de $\overline{G_{k'}}$ stable sous l'action de Γ admet un point k-rationnel si et seulement si G admet un sous-groupe parabolique de type τ.

Descente

1. Soit X le schéma des sous-groupes de Borel de G (défini sur k que G soit déployé ou non). L'action de G sur X par conjugaison fournit un morphisme de G dans $\mathrm{Hilb}(X \times X)$.
2. La compactification magnifique $\overline{G_{k'}}$ de $G_{k'}$ s'identifie de façon $G_{k'} \times G_{k'}$-équivariante à l'adhérence de l'image de $G_{k'}$ dans $\mathrm{Hilb}(X \times X)_{k'}$
3. Le plongement étant $Gal(k'/k)$-équivariant, on a bien une action de Galois sur $\overline{G_{k'}}$

Rationalité des orbites

1. On utilise l'existence de fibrations

$$\bigcap_{\alpha \notin \tau} D_\alpha \to (G/P_\tau) \times (G/P_\tau^-),$$

   où P_τ est parabolique de type τ et P_τ^- un parabolique opposé à P_τ. La fibre est un k-groupe.
2. Cette application est définie sur k ssi $\Gamma \cdot \tau = \tau$.
3. On a donc un point k-rationnel dans l'orbite $\bigcap_{\alpha \notin \tau} D_\alpha$ ssi il existe un parabolique de type τ.

On retrouve les résultats suivants:

Théorème

Avec les hypothèses précédentes:

1. G admet une compactification G-équivariante projective lisse X telle que $X \setminus G$ admette un point rationnel si et seulement si G est isotrope. (Cas très particulier d'un théorème de Gabber de 2012)
2. G est k-anisotrope si et seulement si $G(k)$ est compact (Bruhat-Tits-Rousseau).

Construction du plongement:
On définit une application de "position relative":

$$\Theta : \mathcal{B}(G,k) \times \mathcal{B}(G,k) \to G^{\mathrm{an}}$$

Construction du plongement:
On définit une application de "position relative":

$$\Theta : \mathcal{B}(G,k) \times \mathcal{B}(G,k) \to G^{\mathrm{an}}$$

Si $x, y \in \mathcal{B}(G,k)$, le point $\Theta(x,y)$ "code" l'information sur les $g \in G(K)$ tels que $gx_K = y_K$ dans $\mathcal{B}(G,K)$ pour toute extension non-archimédienne K/k.

Formule explicite pour Θ: Pour

- T un tore k-déployé maximal
- x et y deux points de l'appartement $A(T, k) \simeq X_*(T) \otimes \mathbb{R}$
- B est un sous-groupe de Borel contenant T

Formule explicite pour Θ: Pour

- T un tore k-déployé maximal
- x et y deux points de l'appartement $A(T,k) \simeq X_*(T) \otimes \mathbb{R}$
- B est un sous-groupe de Borel contenant T

on a

$$\Theta(x,y) \in \Omega(T,B)^{\mathrm{an}}$$

Formule explicite pour Θ: Pour

- T un tore k-déployé maximal
- x et y deux points de l'appartement $A(T,k) \simeq X_*(T) \otimes \mathbb{R}$
- B est un sous-groupe de Borel contenant T

on a

$$\Theta(x,y) \in \Omega(T,B)^{\mathrm{an}}$$

et pour $f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^\Phi, \chi \in X^*(T)} a_{\chi,\nu} \chi \xi^\nu \in k[X^*(T)][(\xi_\alpha)_{\alpha\in\Phi}]$:

$$|f(\Theta(x,y))| = \max_{\substack{\nu\in\mathbb{N}^\Phi \\ \chi\in X^*(T)}} |a_{\chi,\nu}| e^{\langle\chi,y\rangle - \langle\chi,x\rangle} \prod_{\alpha\in\Phi_-} e^{\nu_\alpha\langle\alpha,y\rangle} \prod_{\alpha\in\Phi_+} e^{\nu_\alpha\langle\alpha,x\rangle}$$

On obtient une extension

$$\begin{tikzcd} A(T,k)\times A(T,k) \arrow[r, "\Theta"] \arrow[d, "\subset"] & \Omega(T,B) \arrow[d, "\subset"] \\ A(T,k)\times \overline{A(T,k)}^{B} \arrow[r, "\Theta_{(T,B)}"] & \overline{G}_0^{\mathrm{an}} \end{tikzcd}$$

où

$$\overline{G}_0 = R_u(B^-)\times \mathbb{A}^{\dim T}\times R_u(B),$$

avec $T\hookrightarrow \mathbb{A}^{\dim T}$ via $t\mapsto \left(\frac{1}{\alpha_1(t)},\ldots,\frac{1}{\alpha_{\dim T}(t)}\right)$.

Fin

Merci pour votre attention !

Quelques références

- Berkovich: Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields
- Brion: Group completions via Hilbert schemes
- Chanfi: Wonderful compactifications of Bruhat-Tits buildings in the non-split case
- Rémy, Thuillier, Werner: Bruhat-Tits from Berkovich's point of view I
- Rémy, Thuillier, Werner: Wonderful compactifications of Bruhat-Tits buildings
- Tits: Reductive groups over local fields